《组合数学及应用》

习题与答案

刘关俊

目　录

第一章　排列与组合之习题与答案 **1**

第二章　二项式定理与信息熵之习题与答案 **6**

第三章　鸽巢原理之习题与答案 **18**

第四章　拉姆齐理论之习题与答案 **25**

第五章　生成函数之习题与答案 **30**

第六章　递归关系之习题与答案 **37**

第七章　容斥原理之习题与答案 **47**

第八章　伯恩赛德计数定理和波利亚计数定理之习题与答案 **55**

第一章　排列与组合之习题与答案

1. 已知 $|X| \leqslant |Y|$，证明从 X 到 Y 的单射函数的个数为 $|Y|^{\underline{|X|}}$。

   证明：

   令 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$。

   令 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m) = (y_{a_1}, y_{a_2}, \cdots, y_{a_m})$ 是一个单射函数[①]，即它必须满足 $\forall a_j, a_k \in \{1, 2, \cdots, n\}$：

   $$a_j \neq a_k \Rightarrow y_{a_j} \neq y_{a_k}$$

   由乘法原则知满足上述要求的 $(y_{a_1}, y_{a_2}, \cdots, y_{a_n})$ 共有 $n^{\underline{m}} = |Y|^{\underline{|X|}}$ 个。

2. n 个不同的字符 a_1、a_2、$\cdots$、a_n 依次进栈恰一次，字符可随进随出，问有多少种不同的出栈方式？

   解：

   设 $f(n)$ 为 n 个字符的不同的出栈序列的个数。

   假定最后一个出栈的元素是 a_k，则 k 取 n 个不同值的情况相互独立。

   由 a_k 最后出栈，则下标比 k 小的元素在 a_k 进栈前已全部出栈，其出栈序列有 $f(k-1)$ 种。

   下标比 k 大的元素在 a_k 后入栈、在 a_k 前全部出栈，故其出栈序列有 $f(n-k)$ 种。

   因此由乘法原则知：在 a_k 最后出栈情况下共有 $f(k-1)f(n-k)$ 种出栈序列。规定 $f(0) = 1$。进而由加法原则可得 $f(n)$：

   $$f(n) = f(0)f(n-1) + f(1)f(n-2) + \cdots + f(n-1)f(0)$$

   这是一个经典的卡特兰数递归关系（具体内容见第六章），其计算公式为：

   $$f(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

3. 已知 k_1、k_2、$\cdots$、k_n 均为正整数。将 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ 个不同物品放入 n 个不同的盒子 Box_1、Box_2、$\cdots$、Box_n 中，要求 Box_j 中放入 k_j 个物品（$1 \leqslant j \leqslant n$），问有多少种不同的放法？并展示该问题与定理 1.5 的关系。

[①]这里所表示的意思为：$\forall j \in \{1, 2, \cdots, m\}, f(x_j) = y_{a_j}$。

解：

由于同一盒内物品无序，可以这样处理：从 $k_1+k_2+\cdots+k_n$ 个不同物品选出 k_1 个放入 Box_1，可选的组合数为：

$$\binom{k_1+k_2+\cdots+k_n}{k_1}$$

固定该种选择，再从剩余的 $k_2+k_3+\cdots+k_n$ 个不同物品选出 k_2 个放入 Box_2，可选的组合数为：

$$\binom{k_2+k_3+\cdots+k_n}{k_2}$$

依此类推，直至将 k_n 个物品放入 Box_n。由乘法原则，总放法数为：

$$\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!\cdot(k_2+k_3+\cdots+k_n)!}\cdot\frac{(k_2+k_3+\cdots+k_n)!}{k_2!\cdot(k_3+\cdots+k_n)!}\cdots\cdots\frac{k_n!}{k_n!}=\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\cdots\cdot k_n!}$$

该问题与定理 1.5 的关系：

这里的一种放置方法就等同于多集 $[\![k_1\cdot\mathrm{Box}_1,k_2\cdot\mathrm{Box}_2,\cdots,k_n\cdot\mathrm{Box}_n]\!]$ 的一个全排列，反之亦然。给定这样的一个全排列，如果第 j 个位置上放置的是 Box_l，则意味着编号为 j 的物体放置在 Box_l 中，这里 $1\leqslant j\leqslant k_1+k_2+\cdots+k_n$，$1\leqslant l\leqslant n$。

4. 有 k 个车，其中 c_j 色的车有 k_j 个（$1\leqslant j\leqslant n$），$k_1+k_2+\cdots+k_n=k$。将这 k 个车放置在 $k\times k$ 的棋盘上，要求任何两个车不在同一行也不在同一列。证明：不同的放法数为

$$\frac{(k!)^2}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$$

证明：

先认为所有车均有差异，其在棋盘上的位置转化成坐标 (x_j,y_j)，其中 $j\in\{1,2,\cdots,k\}$ 表示第 j 个车。则：

第一个车，横坐标 x_1 有 k 种不同取值，y_1 有 k 种不同取值，共 k^2 种坐标；第二个车，x_2,y_2 均有 $(k-1)$ 种不同取值，共 $(k-1)^2$ 种坐标；$\cdots$；第 j 个车，x_j,y_j 均有$(k+1-j)$ 种不同取值，共 $(k+1-j)^2$ 种坐标；故 k 个车，共有 $k^2\cdot(k-1)^2\cdots2^2\cdot1^2=(k!)^2$ 种放置方式。

再消除同色车差异：因为 C_j 色的车有 $k_j!$ 种排列方式，故不同放法数为：

$$\frac{(k!)^2}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$$

5. 证明：将 k 个相同的物品放入 n 个不同的盒子中，则不同的放法数为

$$\binom{k+n-1}{k}$$

并展示该结论与定理 1.6 的关系。

证明：

设 n 个盒子中放入的物品数分别为 x_1、x_2、…、x_n，则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \quad x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$$

不同的方法数即为求上述不定方程的非负整数解的个数。该不定方程的一个非负整数解对应 k 个 1 和 $n-1$ 个 0 的一个全排列，故其解个数为多集 $[\![k\cdot 1, n\cdot 0]\!]$ 的全排列的个数：

$$\binom{k+n-1}{k}$$

该结论与定理 1.6 的关系：

这里的一种放法对应于多集 $[\![\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n]\!]$ 的一个 k-元组合数，这里 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 看作 n 个盒子。令该多集的一个 k-元组合为 $[\![x_1 \cdot a_1, x_2 \cdot a_2, \cdots, x_n \cdot a_n]\!]$，则 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$，对应的 k 个物品的方法为 a_j 盒子中放了 x_j 个物品，$j = 1, 2, \cdots, n$。

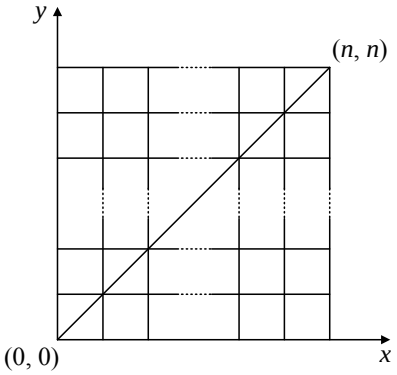


图 1.1 格子路径，在对角线右下方的路径上行走。

6. 图 1.1 所示的格子路径中，$n \geqslant 0$，从 $(0,0)$ 沿着与 x–轴和 y–轴箭头方向同向的边走到 (n,n)，且要求在对角线右下方走，不能穿过对角线，问有多少种走法？（提示：查阅卡特兰数相关知识。）

解：

令 $f(n)$ 表示从 $(0,0)$ 走到 (n,n) 的符合要求的走法数。考察已经从 $(0,0)$ 出发，第一次接触对角线上 (k,k) 点的合法的走法数：利用乘法原则，这样的走法数等于从 $(1,0)$ 走到 $(k,k-1)$ 且不穿过对角线 $(1,0)$—$(k,k-1)$ 的走法数乘以从 (k,k) 走到 (n,n) 且不穿过对角线 (k,k)—(n,n) 的走法数，即 $f(k-1)\cdot f(n-k)$，k 的取值为 1 到 n。规定 $f(0)=1$。因此有：

$$f(n)=f(0)f(n-1)+f(1)f(n-2)+\cdots+f(n-1)f(0)$$

与习题 2 相同的递归函数。

7. 已知多集 $M=[\![\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n]\!]$，证明：要求每个元素都至少出现一次的 M 的 k–元组合数为
$$\binom{k-1}{n-1}$$

证明： 设 a_i 出现的次数为 x_i 次 $(i=1,2,\ldots,n)$，$x_i\geqslant 1$，则该问题等价于求不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=k$$

的正整数解的个数。可理解为有 k 个小球依次排列，现用 $(n-1)$ 个隔板将其分成 n 块，但隔板不能相邻。k 个小球共 $(k-1)$ 个间隔用于放隔板，共 $\binom{k-1}{n-1}$ 种放法。因此，满足题意的 k–元组合数为 $\binom{k-1}{n-1}$。

8. 令整数 n（$n>1$）的素因子分解式为 $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_j^{k_j}$，其中每个素因子的幂均大于或等于 1。求能整除 n 的正整数的个数。

解：

整除 n 的正整数具有形式 $p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_j^{t_j}$，其中 t_1 取值有 0、1、$\cdots$、k_1，t_2 取值有 0、1、$\cdots$、k_2，$\cdots$，t_j 取值有 0、1、$\cdots$、k_j。则由加法原则知，所有可能的数的个数为：$(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_j+1)$。

9. 求不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_9=50$ 满足约束 $x_k\geqslant k$（$1\leqslant k\leqslant 9$）的整数解的个数。

解：

由 $x_1+x_2+\cdots+x_9=50$ 得：$(x_1-1)+(x_2-2)+\cdots+(x_9-9)=5$。令 $y_k=x_k-k$，$k=1,2,\cdots,9$，则 $y_k\geqslant 0$，且 $x_k=y_k+k$。则问题转化为求

$$y_1+y_2+\cdots+y_9=5$$

的非负整数解的个数。由定理 1.6 知个数为：$\binom{5+9-1}{9-1}=1287$。

10. 编程实现 Petri 网的输入、可达图的生成、以及死锁检测。并思考：是否对所有的 Petri 网其可达图都可以生成？

    解：略。

11. 给定一个 Petri 网，如果将变迁与库所安排一个顺序，在该顺序下可以构造一个“变迁对应行、库所对应列”的矩阵，而标识也对应一个行向量，基于这样定义的矩阵与行向量，给出变迁使能与发生的规则，并给出标识可达的一个必要条件。

    解：略。

12. 下面是一个使用锁变量的 RUST 程序，试构造其 Petri 网模型，并通过模型分析是否存在死锁。

    解：略。

第二章　二项式定理与信息熵之习题与答案

1. 利用归纳法证明定理 2.1。

证明：

当$n=1$ 时显然成立。假设当 $n=m$ 时，满足

$$(x+y)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k$$

那么当 $n=m+1$ 时，有：

$$\begin{aligned}
(x+y)^{m+1} &= (x+y)^m\cdot(x+y)\\
&=\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k\right)(x+y)\\
&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m+1-k}y^k+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^{k+1}\\
&=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m+1-k}y^k+\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}x^{m+1-k}y^k\\
&=x^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\left(\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right)x^{m+1-k}y^k+y^{m+1}\\
&=x^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}x^{m+1-k}y^k+y^{m+1}\\
&=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^{m+1-k}y^k
\end{aligned}$$

2. 牛顿为测试 $\sqrt{1-x^2}$ 的展开是否有意义，将其展开与自身相乘，发现其结果确实等于 $1-x^2$。试证明：

$$1-x^2=\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k-1}\cdot\frac{1}{(2k-1)\cdot 2^{2k}}\cdot\binom{2k}{k}\cdot x^{2k}\right)^2。$$

证明：

因为

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k-1}\frac{1}{(2k-1)2^{2k}}\binom{2k}{k}x^{2k} = 1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)2^{2k}}\binom{2k}{k}x^{2k}\\ &= 1-\frac{1}{1\cdot 2^2}\binom{2}{1}x^2-\frac{1}{3\cdot 2^4}\binom{4}{2}x^4-\frac{1}{5\cdot 2^6}\binom{6}{3}x^6-\frac{1}{7\cdot 2^8}\binom{8}{4}x^8-\cdots\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&(\sqrt{1-x^2})^2\\ &= \left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)2^{2k}}\binom{2k}{k}x^{2k}\right)^2\\ &= 1-x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{(2n-1)2^{2n}}\binom{2n}{n}\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)2^{2k}}\binom{2k}{k}\frac{1}{(2(n-k)-1)2^{2(n-k)}}\binom{2(n-k)}{n-k}\right)x^{2n}\\ &= 1-x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{2}{(2n-1)}\binom{2n}{n}\right.\\ &\qquad\left.+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)}\frac{1}{(2(n-k)-1)}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\right)\frac{x^{2n}}{2^{2n}}\end{aligned}$$

因此，只需证明 $\forall n\geqslant 2$，$\frac{x^{2n}}{2^{2n}}$ 的系数均为 0 即可，即只需证：

$$\frac{2}{(2n-1)}\binom{2n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)}\frac{1}{(2(n-k)-1)}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} \tag{1}$$

容易验证 $2n$ 的值为 4、6、8、10、12 时，该等式均成立。下面给出一种基于递归函数与生成函数证明该等式的方法（见第 5–6 章）。首先构造递归函数：

$$f(n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}f(k)f(n-k),\quad n\geqslant 2;\quad f(1)=2$$

如果能解出此递归函数为 $f(n)=\frac{1}{(2n-1)}\binom{2n}{n}$，则证明了上述等式成立。构造如下生成函数：

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}f(n)x^n = f(1)x+\sum_{n=2}^{\infty}f(n)x^n\\ &= 2x+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(f(1)f(n-1)+f(2)f(n-2)+\cdots+f(n-1)f(1)\right)x^n\\ &= 2x+\frac{1}{2}\mathcal{G}(x)^2\end{aligned}$$

将 $\mathcal{G}(x)$ 看作未知数求解得：

$$\mathcal{G}(x) = 1 \pm \sqrt{1-4x}$$

又因为

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n$$

所以

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n \text{ 或者 } \mathcal{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n$$

所以

$$f(n) = \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \text{ 或者 } f(n) = \frac{-1}{2n-1} \binom{2n}{n}$$

抛弃负数的情况。因此等式 (1) 成立

3. 思考以下方法证明二项式系数的递归展开式一：

(1) 可利用性质 2.3 中的递归关系；

(2) 可利用例 1.5 中的格子路径的组合意义；

(3) 可利用集合的子集数的组合意义；

(4) 可利用定理 1.6 中多集的子多集数的组合意义。

证明：

(1)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} &= \binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \cdots + \binom{m+n}{n} \\
&= \binom{m+1}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \cdots + \binom{m+n}{n} \\
&= \binom{m+2}{1} + \binom{m+2}{2} + \cdots + \binom{m+n}{n} \\
&= \binom{m+3}{3} + \cdots + \binom{m+n}{n} \\
&= \cdots \\
&= \binom{m+n}{n-1} + \binom{m+n}{n} \\
&= \binom{m+n+1}{n}
\end{aligned}$$

(2)

$\binom{m+n-1}{n-1}$ 可以理解为从 $(0,0)$ 走到 $(n,m+1)$ 的路径数。设路径上 $y=m$ 处有点，设第一个交点为 (k,m)，$k=0,1,2,\ldots,n$，则：

$$\binom{m+n-1}{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}$$

(3)

$\binom{m+n+1}{n}$ 是 $m+n+1$ 元集合的 n 元子集数，设集合

$$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m,a_{m+1},\ldots,a_{m+n+1}\}$$

则 n 元子集只有以下 2 种情况：

第 1 种情况：子集中不含 a_1，则共有 $\binom{m+n}{n}$ 种；

第 2 种情况：子集中含 a_1，这种情况又分为 2 种情况：

第 2.1 种情况：子集中含 a_1 但不含 a_2，则共有 $\binom{m+n-1}{n-1}$ 种；

第 2.2 种情况：子集中含 a_1 且含 a_2，这种情况有分为如下两种情况：

第 2.2.1 种情况：子集中含 a_1 且含 a_2，但不含 a_3，则共有 $\binom{m+n-2}{n-2}$ 种；

第 2.2.2 种情况：子集中含 a_1 且含 a_2 且含 a_3，$\cdots$，如此下去直至：

子集中含 a_1、a_2、$\cdots$、a_{n-1}，但不含 a_n，有 $\binom{m+1}{1}$ 种，以及子集中含 a_1、a_2、$\cdots$、a_n，有 $\binom{m}{0}=1$ 种。

由加法原理知等式成立。

(4)

$\binom{m+n+1}{n}$ 可看成多集 $[\![\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_{m+2}]\!]$ 的 n 元组合数。

可分为含 0 个 a_1、1 个 a_1、2 个 a_1、$\ldots$、n 个 a_1 这 $n+1$ 类。

其对应的 n 元组数分别为：

$$\binom{m+n}{n},\binom{m+n-1}{n-1},\ldots,\binom{m}{0}$$

故等式也成立。

4. 证明多项式系数满足如下递归关系：

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\sum_{j=1}^{k}\binom{n-1}{n_1,\cdots,n_j-1,\cdots,n_k},$$

其中 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$。

证明：

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\binom{n-1}{n_1,\cdots,n_j-1,\cdots,n_k} &= \sum_{j=1}^{k}\frac{(n-1)!}{n_1!n_2!\cdots(n_j-1)!\cdots n_k!}\\ &= \sum_{j=1}^{k}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_j!\cdots n_k!}\cdot\frac{n_j}{n}\\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_j!\cdots n_k!}\sum_{j=1}^{k}\frac{n_j}{n}\\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_j!\cdots n_k!}\\ &= \binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}\end{aligned}$$

5. 利用二项式系数的递归展开式二求 $\sum_{k=1}^{n}k^2$。

解：

$$\begin{aligned}k^2 &= k^2+k-k = k(k-1)+k = 2\binom{k}{2}+\binom{k}{1}\\ \sum_{k=1}^{n}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\left(2\binom{k}{2}+\binom{k}{1}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}\\ &= 2\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} = 2\left(\binom{n+1}{3}\right)+\left(\binom{n+1}{2}\right)\\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3}+\frac{(n+1)n}{2}\\ &= \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}\end{aligned}$$

6. 在杨辉三角形中展示递归展开式一、递归展开式二、朱世杰恒等式的特征。

解：

递归展开式一 $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$：令 $m=3$，$n=2$，如图 2.1 中蓝线所示

递归展开式二 $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$：令 $m=3$，$n=4$，如图 2.1 中红线所示

朱世杰恒等式 $\sum_{k=l}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}-\binom{l}{m+1}$：令 $m=2$，$n=4$，$l=1$，如图 2.1 中绿线所示

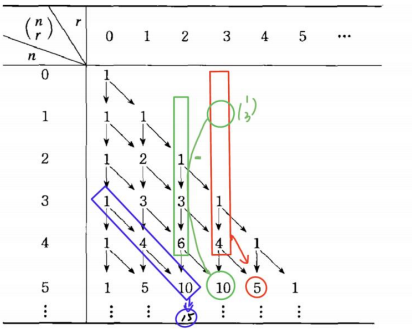


图 2.1 展示第 6 题中的关系。

7. 证明：

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}。$$

（提示：可以依据二项式定理中的公式的导数进行证明，也可以使用二项式系数吸收性进行证明。）

证明：

方法一：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

上式对 x 进行求导：

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k}$$

令 $x = y = 1$，则

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

方法二：

由吸收性知：

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

所以有：

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \cdot 2^{n-1}。$$

8. 利用范德蒙恒等式证明：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{l+k}=\binom{m+n}{n+l}。$$

证明：

要证：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{l+k}=\binom{m+n}{n+l}$$

即证：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{m-l-k}=\binom{m+n}{m-l}$$

由范德蒙恒等式知：

$$\sum_{k=0}^{m-l}\binom{n}{k}\binom{m}{m-l-k}=\binom{m+n}{m-l}$$

则只需证明：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{m-l-k}=\sum_{k=0}^{m-l}\binom{n}{k}\binom{m}{m-l-k}$$

若 $n\geqslant m-l$，当 $k>m-l$ 时，$m-l-k<0$，此时 $\binom{m}{m-l-k}=0$，所以

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{m-l-k}=\sum_{k=0}^{m-l}\binom{n}{k}\binom{m}{m-l-k}+\sum_{k=m-l+1}^{n}\binom{n}{k}\cdot 0$$

$$=\sum_{k=0}^{m-l}\binom{n}{k}\binom{m}{m-l-k}$$

若 $n<m-l$，当 $k>n$ 时，有 $\binom{n}{k}=0$，所以

$$\sum_{k=0}^{m-l}\binom{n}{k}\binom{m}{m-l-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{m-l-k}+\sum_{k=n+1}^{m-l}0\cdot\binom{m}{m-l-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{m-l-k}$$

综上：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m}{l+k}=\binom{m+n}{n+l}$$

9. 求：

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k},$$

并证明：当 $|x| < 1/4$ 时，有

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k。$$

解：

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{k} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{1}{2^k} \cdot \frac{(2k)!}{2^k \cdot k! \cdot k!} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}\end{aligned}$$

证明：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \cdot 1 \cdot (-1)^k \cdot 2^{2k} \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k\end{aligned}$$

10. 证明：

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{m}{k} \binom{n}{l-k} k = \binom{m+n}{l} \frac{ml}{m+n}。$$

（提示：利用二项式系数吸收性与范德蒙恒等式。）

证明：

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{l} \binom{m}{k} \binom{n}{l-k} k = \sum_{k=1}^{l} \frac{m}{k} \binom{m-1}{k-1} \binom{n}{l-k} k = m \sum_{k=1}^{l} \binom{m-1}{k-1} \binom{n}{l-k} \\ &= m \sum_{k=0}^{l-1} \binom{m-1}{k} \binom{n}{l-1-k} = m \cdot \binom{m+n-1}{l-1} \\ &= m \cdot \binom{m+n}{l} \cdot \frac{l}{m+n} = \binom{m+n}{l} \cdot \frac{ml}{m+n}\end{aligned}$$

11. 利用组合意义证明：

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2 = n(n+1)2^{n-2}。$$

证明：

右边：有 $n+1$ 人，形成如下小组：由 2 人担任组长，选取的方法数为 $\binom{n+1}{2}$；而非组长的组员可以为 0 人、1 人、…、或 $n-1$ 人，则为 $n-1$ 人的集合的所有子集情况，数目为 2^{n-1}。所以，能够形成的所有可能的小组的数目为 $\binom{n+1}{2}2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$。这些可能的小组还可以从以下情况考虑：给定一个组员 a，

a 是组长。这时能形成的可能的小组数为：从剩下的 n 人中选 k 人形成小组（选取的方法数为 $\binom{n}{k}$），从 k 人中再选 1 人做组长（ k 种选取方法），则由乘法原则得 $\binom{n}{k}k$，$k = 1, 2, \cdots, n$。

a 不是组长但是组员。这时能形成的可能的小组数为：从剩下的 n 人中选 k 人形成小组（选取的方法数为 $\binom{n}{k}$），从 k 人中再选 2 人做组长（选取的方法数为 $\binom{k}{2}$），则由乘法原则得 $\binom{n}{k}\binom{k}{2}$，$k = 2, \cdots, n$。

a 即不是组长也不是组员。这时能形成的可能的小组数为：从剩下的 n 人中选 k 人形成小组（选取的方法数为 $\binom{n}{k}$），从 k 人中再选 2 人做组长（选取的方法数为 $\binom{k}{2}$），则由乘法原则得 $\binom{n}{k}\binom{k}{2}$，$k = 2, \cdots, n$。

由加法原则得：

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k + 2\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2$$

12. 证明：

$$\binom{n}{k} = \frac{2^{n-1}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((2k-n)x)\cos^n x\,dx$$

（提示：利用欧拉公式将积分中的余弦函数用复指数形式表示，然后再利用二项式系数全和公式。）

证明：

已知欧拉公式：

$$\cos^n x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$$

$$\cos((2k-n)x) = \frac{e^{i(2k-n)x}+e^{-i(2k-n)x}}{2}$$

则：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos((2k-n)x)\cos^n x\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(2k-n)x}+e^{-i(2k-n)x}}{2}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n dx \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(2k-n)x}+e^{-i(2k-n)x}\right)\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}e^{i(n-2m)x}\right) dx \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(2k-2m)x}+e^{-i(2k+2m-2n)x}\right) dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

同理可得：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos((2k-n)x)\cos^n x\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(2k-n)x}+e^{-i(2k-n)x}}{2}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n dx \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(2k-n)x}+e^{-i(2k-n)x}\right)\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}e^{i(2m-n)x}\right) dx \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{-i(2k-2m)x}+e^{i(2k+2m-2n)x}\right) dx \qquad (2)
\end{aligned}$$

由 (1) 和 (2) 两端相加可得：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos((2k-n)x)\cos^n x\,dx \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos 2(k-m)x+\cos 2(k+m-n)x\right) dx \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2(k-m)x\,dx+\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2(k+m-n)x\,dx\right)
\end{aligned}$$

考察上式的两个积分项，对前者：只有 $m=k$ 时该积分的值为 2π 而 m 取其他值均使其为 0，对后者：只有 $m=n-k$ 时该积分的值为 2π 而 m 取其他值均使其为 0，因此有：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos((2k-n)x)\cos^n x\,dx = \frac{1}{2^{n+1}}\left(2\pi\binom{n}{k}+2\pi\binom{n}{n-k}\right) = \frac{\pi}{2^{n-1}}\binom{n}{k}$$

因此，结论成立。

13. 借鉴吸收性恒等式的组合意义证明方法，证明三转二性恒等式。

证明：

$\binom{n}{m}\binom{m}{k}$ 可以理解为有 n 个人的社团，从中选出 m 人小组，并从这 m 个人中再选出 k 个人作为骨干不同的方案数。这种构建方法可以等价地改为：先从 n 个人中选取 k 个人作为骨干，再从剩余 $n-k$ 个人中选择 $m-k$ 人作为其余组员，不同的方案数为 $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$。

14. 证明：给定一个 n，当 $q=1/2$ 时，二项分布的熵 $\mathcal{H}(n,q)$ 最大。

证明：

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(n,q) &= -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\log_2\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\right)\\
&= -\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\left(\log_2\binom{n}{k}+k\log_2 q+(n-k)\log_2(1-q)\right)\right)\\
&= -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\log_2\binom{n}{k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}k\log_2 q\\
&\quad -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}(n-k)\log_2(1-q)
\end{aligned}$$

二项分布具有如下性质（计算方法可参看第 5 章的例 5.6）：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}k=nq$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}(n-k)=n(1-q)$$

由此可得到：

$$\mathcal{H}(n,q)=-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}\log_2\binom{n}{k}-nq\log_2 q-n(1-q)\log_2(1-q)$$

进而可得到：

$$\frac{d}{dq}\mathcal{H}(n,q)=-n\log_2\frac{q}{1-q}$$

$$\frac{d^2}{dq^2}\mathcal{H}(n,q)=-\frac{n}{q(1-q)\ln 2}$$

令

$$\frac{d}{dq}\mathcal{H}(n,q)=0$$

解得：

$$q = \frac{1}{2}$$

此时有：

$$\frac{d^2}{dq^2}\mathcal{H}(n,q) < 0$$

所以，给定 n 的情况下 $\mathcal{H}(n,q)$ 在 $q = \frac{1}{2}$ 处取最大值。

15. 证明：有 n 个取值的离散型随机变量 X 的熵满足 $0 \leqslant \mathcal{H}(X) \leqslant \log_2 n$。

证明：

令 $p_i = P(X = x_i)$，$i = 1, 2, \ldots, n$，且 $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$，则

$$\mathcal{H}(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

规定：当 $p = 0$ 时 $p \log_2 p = 0$。因为 $\forall i \in \{= 1, 2, \ldots, n\}$：$0 \leqslant p_i \leqslant 1$，所以 $-p_i \log_2 p_i \geqslant 0$，所以 $\mathcal{H}(X) \geqslant 0$。显然，只存在一个 $i \in \{= 1, 2, \ldots, n\}$ 使得相应的概率值为 1 而其他的概率值为 0 时（此时意味着事件的发生是唯一确定的），$\mathcal{H}(X)$ 的值最小，即为 0。而当每个事件的发生都是等概率的，即 $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : p_i = \frac{1}{n}$，此时不确定性最大，即 $\mathcal{H}(X)$ 的值最大，为：

$$\mathcal{H}(X) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{n} = -\log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n$$

16. 编程实现 ID3 算法。

解：略。

17. 信息增益对取值数目较多的特征有所偏好，对分类产生不利影响，为此，C4.5 使用增益率（gain ratio）选择特征，增益率定义为：

$$gain_ratio(S, A) \triangleq \frac{gain(S, A)}{IV(A)},$$

其中，

$$IV(A) \triangleq -\sum_{j=1}^{n} \frac{|S_{a_j}|}{|S|} \log_2 \frac{|S_{a_j}|}{|S|}$$

被称为特征 A 的固有值（intrinsic value），$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$。特征 A 的取值数目越多，其固有值通常会越大。将算法 **??** 中依据信息增益选择特征的步骤换成增益率，并通过一些数据集做测试，分析 C4.5 与 ID3 的差异。

解：略。

第三章　鸽巢原理之习题与答案

1. 已知 n 个整数 a_1、a_2、$\cdots$、a_n，证明：存在整数 j 和 l（$1 \leqslant j \leqslant l \leqslant n$）满足

$$n \Big| \sum_{k=j}^{l} a_k,$$

其中：| 是整除符号，意味着左边的数整除右边的数。（提示：构造连续项的和。）

证明：

构造 n 个新数：$b_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$。如果存在某个 b_i 满足 $n|b_i$，则结论成立；否则，这 n 个新数除以 n 的余数只能是 1 至 $n-1$ 中的数，由鸽巢原理可知：必存在 $j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $j < l$，使得 $b_j \equiv b_l \pmod{n}$，从而：$(b_l - b_j) \equiv 0 \pmod{n}$，即 $n|(a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots a_l)$。

2. 某棋手有 11 周时间准备比赛，要求每天至少下 1 盘棋而任意连续的 7 天下棋盘数不能超过 12。证明：在这准备期内某些连续的天中他恰好下了 21 盘棋。

证明：

设前 i 天下的盘数为 b_i $(i = 1, 2, \cdots, 77)$。由题可知：$\forall i \in \{1, 2, \ldots, 77\}$，$b_i \geqslant i$ 且 $b_{i+7} - b_i \leqslant 12 \quad (1 \leqslant i \leqslant 70)$；又因为 $b_{77} \leqslant 12 \times 11 = 132$，所以，$b_{77} + 21 \leqslant 153$。因此有：

$$1 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_{77} \leqslant 132 \text{ 且 } 22 \leqslant b_1 + 21 < b_2 + 21 < \cdots < b_{77} + 21 \leqslant 153$$

即 $b_1, b_2, \ldots, b_{77}, b_1 + 21, b_2 + 21, \cdots, b_{77} + 21$ 是 [1, 153] 内的 154 个数。由鸽巢原理知，这 154 个数中必存在两数相同，且由于两列数为严格递增关系，所以一定存在 m, n 满足：$1 \leqslant m < n \leqslant 77$ 且 $b_n = b_m + 21$，即 $b_n - b_m = 21$，即连续的第 $m+1, m+2, \cdots, n$ 天中他恰好下了 21 盘棋。

3. 从 1 到 200 的所有正整数中任取 101 个，则必能取到两个不同的数使得其中一个整除另一个。（提示：任一正整数可写成 $2^k \cdot r$ 的形式，其中 k 是非负整数，r 是奇数。）

证明：

假设 a_i 为 $[1, 200]$ 间的一个正整数，$i = 1, 2, \cdots, 200$。令 a_i 的分解式为 $a_i = 2^{k_i} \cdot r_i$，则 k_i 的取值为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，$r_i$ 的取值为 $\{1, 3, 5, 7, \cdots, 199\}$，即 r_i 共 100 个可能的取值，若任取 101 个数，由鸽巢原理，必有两数 a_m, a_n满足：它们的分解式中 $r_m = r_n$，此时不妨设 $a_m > a_n$，则 $a_n \mid a_m$。

4. 证明：任一有理数的十进制数展开式从某一位后必是循环的。

证明：

若一个有理数是整数，结论显然成立（因为小数点后全是 0）。下面考虑非整数的有理数。任一有理数均可用互素的两个整数的比来表示，令 $r = \frac{p}{q}$ 为任一有理数，p, q 互素。计算 $\frac{p}{q}$ 的 10 进制时，实际上在进行长除法，依次取 p 的 10 进制高位并计算余数。而余数的可能取值为：$0, 1, 2, \ldots, q-1$，共 q 种余数。因此至多进行 q 步长除法后，出现重复余数，再用该余数进行长除法，会循环出现之前的余数。故任一有理数的 10 进制展开式某一位后必是循环的。

5. 证明：任给 $n+1$（$n > 1$）个不同的正整数，则其中必有两个不同的数，它们的差能被 n 整除。

证明：

任一数除以 n，其余数只能为 $0, 1, 2, \ldots, n-1$，共 n 种可能。由鸽巢原理，任给 $n+1$ 个数除以 n，则总存在两个数，它们除以 n 的余数相同，则这两个数的差除以 n 的余数为 0，即能被 n 整除。

6. 证明：对任一正整数，都存在它的一个倍数使得该倍数仅由数字 0 和 9 组成。如 1，则有 $1 \times 9 = 9$；如 2，则有 $2 \times 45 = 90$；又如 3，则有 $3 \times 3 = 9$。

证明：

设 n 为任一正整数，令 $a_i = \sum_{k=0}^{i-1} 9 \times 10^k$，$i = 1, 2, \ldots, n$（例如 $a_1 = 9, a_2 = 99$），则有 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 共 n 个数。若存在 a_i，使得 $n \mid a_i$，则结论成立，否则，a_i 除以 n 的余数共有 $1, 2, \ldots, n-1$ 这 $n-1$ 种可能。由鸽巢原理知：这 n 个数中必存在两个数，不妨设为 a_s 和 a_t 且 $s < t$，满足 $a_s \equiv a_t \pmod{n}$，则 $(a_t - a_s) \equiv 0 \pmod{n}$，即 $n \mid (a_t - a_s)$，而 $a_t - a_s$ 为仅由数字 0 和 9 组成的数。

7. 证明：将上一题中的 9 换成 1 到 8 中的任一数字结论仍然成立。

证明：

设 k 为 1 到 8 之间的任意的整数。设 n 为任一正整数，$a_i = \sum_{j=0}^{i-1} k \times 10^j$，$i = 1, 2, \ldots, n$（例如 $a_1 = k, a_2 = kk$）则有 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 共 n 个数。若存在 a_i 使得 $n \mid a_i$，则结论成立，否则，a_i 除以 n 的余数共有 $1, 2, \ldots, n-1$ 这 $n-1$ 种可能。由鸽巢原理知：这 n 个数中必存在两个数，不妨设为 a_s 和 a_t，$s < t$，满足 $a_s \equiv a_t \pmod{n}$，则 $(a_t - a_s) \equiv 0 \pmod{n}$，即 $n \mid (a_t - a_s)$，而 $a_t - a_s$ 为仅由数字 0 和 k 组成的数。

8. 证明：用红蓝两种颜色对 3×9 的棋盘的方格任意进行着色，则必有两列方格有相同的着色。

证明：

每一列共 3 个格子，每个格子有两种着色方案，则每一列共 $2^3 = 8$ 种着色方案。由鸽巢原理：共 9 列，每列有 8 种着色方案，则必有两列格子有着相同的着色。

9. 证明：将 1 到 16 的这 16 个正整数任意分成 3 组，则其中必有一组满足：其中的某个数等于该组中另外某两个数之和（后面的这两个数可以是同一个）。

证明：

用反证法。设将 1 到 16 的 16 个整数任意分成 P_1、P_2 和 P_3 三个部分. 若这三部分中无一具有问题所指的性质，即其中一个元素是其中某两个元素之差，由此来导出矛盾，从而证明问题的结论是正确的。

(1) 将 1 到 16 的整数任意分成三部分，由鸽巢原理知，其中必有一部分至少有

$$\left\lceil \frac{16}{3} \right\rceil = 6$$

个元素。不妨设 P_1 中含有 6 个元素，为

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$$

令 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \subseteq P_1$，若 A 中存在一个元素是某两个元素之差，则 P_1 满足问题的要求，问题得证。否则，令

$$b_1 = a_2 - a_1$$
$$b_2 = a_3 - a_1$$
$$b_3 = a_4 - a_1$$
$$b_4 = a_5 - a_1$$
$$b_5 = a_6 - a_1$$

并令 $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$。显然，$1 \leqslant b_i \leqslant 16$，$1 \leqslant i \leqslant 5$，即 B 中的元素仍是 1 到 16 的整数。根据假设，b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 无一属于 P_1（否则，与 P_1 中不存在一元素等于某两元素之差矛盾）。所以，B 中元素属于 P_2 或 P_3。

(2) 仍然由鸽巢原理知道，B 中至少有

$$\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$$

个元素同属于 P_2 或 P_3，不妨设 B 中的三个元素

$$c_1 < c_2 < c_3$$

同属于 P_2。并令 $C = \{c_1, c_2, c_3\}$。由假设，C 中不存在一元素是某两个元素之和。令

$$d_1 = c_2 - c_1$$
$$d_2 = c_3 - c_1$$

并令 $D = \{d_1, d_2\}$。显然， D 中元素不属于 P_2，否则，与 P_2 中不存在一元素是某两个元素之差矛盾，且 $1 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant 16$。下面再证明 D 中元素均不属于 P_1。

设 $c_i = b_{j_i}$ $(i = 1, 2, 3; 1 \leqslant j_1 < j_2 < j_3 \leqslant 5)$，则

$$\begin{aligned} d_1 &= c_2 - c_1 \\ &= b_{j_2} - b_{i_1} \\ &= (a_{j_2+1} - a_1) - (a_{j_1+1} - a_1) \\ &= a_{j_2+1} - a_{j_1+1} \end{aligned}$$

同理

$$d_2 = a_{j_3+1} - a_{j_1+1}$$

若 d_1 或 d_2 属于 P_1，则 P_1 中有一元素是另两个元素之和，所以，d_1, d_2 均不属于 P_1。因此，d_1, d_2 均属于 P_3。

(3) 根据假设，在 P_3 中不存在一元素是另两个元素之和，所以 $d_2 \neq d_1 + d_1$，令

$$e = d_2 - d_1$$

与前面的证明类似，可以推导出 e 既不属于 P_3，也不属于 P_2，也不属于 P_1。换句话说，存在一整数 $1 \leqslant e \leqslant 16$，它不属于 P_1, P_2 和 P_3 中的任何一个，产生矛盾。

10. 任给 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个 n–元圆排列、以及任给一个整数 k（$1 \leqslant k \leqslant n$），证明：在这个圆排列中存在 k 个相邻的数，它们的和不小于

$$\left\lceil \frac{k(n+1)}{2} \right\rceil。$$

证明：

设圆排列为 a_1–a_2–$\cdots$–a_n，且令 $a_{n+i}=a_i$，$i\in\{1,2,\ldots,n\}$。圆排列中 k 个相邻的数的和记为 $b_i=a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_{i+k-1}$，$i\in\{1,2,\ldots,n\}$。则：

$$\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+k-1})=k\sum_{i=1}^{n}a_i=k\frac{n(n+1)}{2}$$

由鸽巢原理可知：至少存在一个 b_i 使得

$$b_i\geqslant\left\lceil\frac{k\frac{n(n+1)}{2}}{n}\right\rceil=\left\lceil\frac{k(n+1)}{2}\right\rceil$$

11. 任给 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个 n–元圆排列、以及任给一个整数 k（$1\leqslant k\leqslant n$），证明：在这个圆排列中存在 k 个相邻的数，它们的积不小于

$$\left\lceil(n!)^{\frac{k}{n}}\right\rceil。$$

证明：

设圆排列为 a_1–a_2–$\cdots$–a_n，且令 $a_{n+i}=a_i$，$i\in\{1,2,\ldots,n\}$。圆排列中 k 个相邻的数的积记为 $b_i=a_i\cdot a_{i+1}\cdot a_{i+2}\cdots a_{i+k-1}$，$i\in\{1,2,\ldots,n\}$。则：

$$\prod_{i=1}^{n}b_i=\prod_{i=1}^{n}(a_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_{i+k-1})=(n!)^k$$

由鸽巢原理可知：至少存在一个 b_m 使得

$$b_m\geqslant\left\lceil\sqrt[n]{(n!)^k}\right\rceil=\left\lceil(n!)^{\frac{k}{n}}\right\rceil$$

12. 已知 m 和 n 是两个互素的正整数，a 和 b 是两个整数且满足 $0\leqslant a<m$ 与 $0\leqslant b<n$。证明：存在整数 x 使得 x 除以 m 的余数为 a 且除以 n 的余数为 b。（提示：构造 n 个整数使它们除以 m 的余数均为 a，然后考察这组数除以 n 的余数。）

证明：

考虑以下 n 个整数：$a,m+a,2m+a,\cdots,(n-1)m+a$。这 n 个整数除以 m 的余数都是 a。下面用反证法证明：这 n 个数除以 n 的余数互不相等。假设这 n 个数中存在两个数除以 n 的余数相同，不妨设为 r。令这两个数为 $im+a$ 和 $jm+a$，其中 $0\leqslant i<j\leqslant n-1$。则存在整数 q_i,q_j，使得

$$im+a=q_in+r\text{ 且 }jm+a=q_jn+r$$

将上面两式相减，就可以得到

$$(j-i)m=(q_j-q_i)n$$

从上式可以看出，n 是 $(j-i)m$ 的一个因子。因为 m,n 互素，所以 n 是 $j-i$ 的因子。但是，因为 $0<j-i\leqslant n-1$，所以 n 不可能是 $j-i$ 的因子，产生矛盾。所以 $a,m+a,2m+a,\ldots,(n-1)\cdot m+a$ 这 n 个数除以 n 的余数互不相等，所以这 n 个余数恰好取遍 $0,1,\ldots,n-1$ 这 n 个数。所以，对于任意的 $b\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，都存在 $p\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，使得 $x=pm+a$ 除以 n 的余数为 b（而除以 m 的余数为 a）。

13. 已知 m_1、m_2、$\cdots$、m_n 是两两互素的 n 个正整数，而 a_1、a_2、$\cdots$、a_n、a 是整数。令

$$m=\prod_{k=1}^{n}m_k。$$

证明：存在一个整数 $x\in[a,a+m)$ 满足

$$\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}:x\equiv a_k\pmod{m_k}。$$

证明：

首先证明存在一个整数 y 满足

$$\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}:y\equiv a_k\pmod{m_k}$$

记：

$$M_k=\frac{m}{m_k},\quad\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$$

因为 M_k 与 m_k 互素，所以由第 12 题的结论知（思考为什么由第 12 题的结论可以得到如下结论）：存在整数 y_k 使得

$$y_kM_k\equiv1\pmod{m_k}$$

因此有：

$$a_ky_kM_k\equiv a_k\pmod{m_k}$$

令

$$y=\sum_{k=1}^{n}a_ky_kM_k$$

显然 y 满足

$$\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}:y\equiv a_k\pmod{m_k}$$

令 $x = y - q \cdot m$，其中 $q = \left\lfloor \frac{y-a}{m} \right\rfloor$，即 $x - a$ 是 $y - a$ 除以 m 的余数（而 q 是商）。所以 $0 \leqslant x - a < m$，即 $x \in [a, a+m)$。对于 m 来说，$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 都有 $m \equiv 0 \pmod{m_k}$，所以 $x \equiv y \equiv a_k \pmod{m_k}$。

14. 编程实现多索引哈希算法，并测试其性能。

解：略。

第四章　拉姆齐理论之习题与答案

1. 证明：对 10 个顶点的完全图 K_{10} 任意进行红蓝两色边着色，总能着出一个红色的 K_3 或者一个蓝色的 K_4。

   证明：

   设 K_{10} 完全图的 10 个点分别为 $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{10}$。与 v_1 有关联的 9 个边用红、蓝两色着色，则 9 条边中要么至少有 6 条蓝边，要么至少有 4 条红边。

   若有 4 条红边，不妨设为 v_1 与 v_2, v_3, v_4, v_5 构成的 4 条边。v_2, v_3, v_4, v_5 形成一个 K_4。在此 K_4 中，若 v_2, v_3, v_4, v_5 之间的边全为蓝色，此时就存在了蓝色 K_4，若存在一条红边，此时与 v_1 就构成一个红色 K_3。

   若有 6 条蓝边：不妨设为 v_1 与 $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ 构成的 6 条边。$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ 形成一个 K_6。依据书中定理 4.1 知：此 K_6 中要么有红色 K_3，要么有蓝色 K_3，而对于蓝色 K_3 再加入点 v_1 就构成蓝色 K_4。

2. 证明：对 9 个顶点的完全图 K_9 任意进行红蓝两色边着色，总能着出一个红色的 K_3 或者一个蓝色的 K_4。

   证明：

   给定一个着色的 K_9，假设每个顶点关联的红边都恰好为 5 条，则共有 $\frac{45}{2}$ 条红边，不是整数，这种情况不可能，所以至少存在一个顶点它所关联的红边数要么至少为 6 要么至多为 4，从而针对这个顶点进行习题 1 中的分析就得出结论。

3. 证明：$R(3,4) > 8$。

   证明：

   考虑图 4.1 中 K_8 的着色方式，不存在红色 K_3，也不存在蓝色 K_4。

4. 证明：若 $R(a-1,b)$ 与 $R(a,b-1)$ 为偶数，则 $R(a,b) < R(a-1,b)+R(a,b-1)$。

   证明：

   令 $N = R(a-1,b) + R(a,b-1)$。给定任一着色的 K_{N-1}，下面如果能证明它**总存在**一点，该点关联的 $N-2$ 条边中，要么至少关联了 $R(a-1,b)$ 条红边，要么至少关联了 $R(a,b-1)$ 条蓝边，则由书中引理 4.3 的证明即可得证该问题。

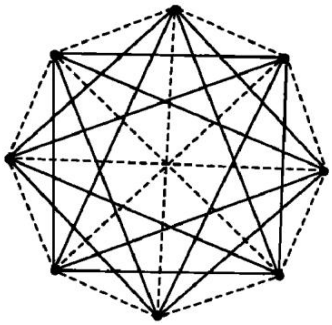


图 4.1 既无红色 K_3 也无蓝色 K_4 的着色方案（实线代表红色虚线代表蓝色）

假设每个顶点都关联了奇数条红边，这些数目分别记为 o_1、o_2、$\cdots$、o_{N-1}。因为 $N-1$ 是奇数，所以 $o_1+o_2+\cdots+o_{N-1}$ 是一奇数。因为每条红边被统计了 2 次，所以实际的红边数为

$$\frac{1}{2}(o_1+o_2+\cdots+o_{N-1})$$

这不是一个整数，所以假设不成立，所以至少存在一点，不妨记为 v，其关联的红边数是偶数。

因为 $R(a-1,b)-1$ 是奇数，所以 v 关联的红边数不等于 $R(a-1,b)-1$。由鸽巢原理知，v 关联的 $R(a-1,b)+R(a,b-1)-2$ 条边中，要么至少关联了 $R(a-1,b)$ 条红边，要么至多关联了 $R(a-1,b)-2$ 条红边；后者意味着至少关联了 $R(a,b-1)$ 条蓝边。

5. 证明：给定 $a\geqslant 2$ 和 $b\geqslant 2$，如果存在实数 $q\in[0,1]$ 满足

$$\binom{n}{a}q^{\binom{a}{2}}+\binom{n}{b}(1-q)^{\binom{b}{2}}<1,$$

则 $R(a,b)>n$。

证明：

设一条边被染成红色的概率为q，$q\in[0,1]$。

在 K_n 完全图中任选出a 个点，就可构成一个 K_a 实例。因此，在 K_n 中存在一个 K_a 实例被着成红色的概率为

$$\binom{n}{a}q^{\binom{a}{2}}$$

同理，在 K_n 中存在一个 K_b 实例被着成红色的概率为

$$\binom{n}{b}(1-q)^{\binom{b}{2}}$$

因此，对于一个着色的K_n，着出红色 K_a 或蓝色 K_b 的概率为

$$p=\binom{n}{a}q^{\binom{a}{2}}+\binom{n}{b}(1-q)^{\binom{b}{2}}$$

已知 $p<1$，所以 $\bar{p}>0$，换句话说，对 K_n 进行着色时，既无红色 K_a 也无蓝色 K_b 的概率不为 0，因此 $R(a,b)>n$。

6. 证明：$R(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant R(a_1,R(a_2,\cdots,a_n))$。

证明：

设 $N=R(a_1,R(a_2,\cdots,a_n))$。对完全图 K_N 用 c_1、c_2、$\cdots$、c_n 种颜色进行任意着色；着完后，将着成 c_2、$\cdots$、c_n 颜色的边都换成颜色 c，则在 K_N 中要么着出了一个 c_1 色的 K_{a_1}、要么着出了一个 c 色的 $K_{R(a_2,\cdots,a_n)}$。如果着出的是 c_1 色的 K_{a_1}，则结论成立；如果着出的是 c 色的 $K_{R(a_2,\cdots,a_n)}$，再将颜色改回去，则在 $K_{R(a_2,\cdots,a_n)}$ 这个完全图中要么着出了一个 c_2 色的 K_{a_2}、要么着出了一个 c_3 色的 K_{a_3}、$\cdots$、要么着出了一个 c_n 色的 K_{a_n}，结论也成了。

7. 证明：舒尔数 s_n 满足：

(1) $s_n\geqslant 3s_{n-1}-1$；

(2) $s_n\geqslant\frac{1}{2}(3^n+1)$。

证明：

(1)

只需证 $\{1,2,\cdots,3S_{n-1}-2\}$ 存在一个 n–划分使得划分中任何子集都不是有和集合即可。因为 $\{1,2,\cdots,S_{n-1}-1\}$ 存在一个 $(n-1)$–划分 $\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{n-1}\}$ 使得其中任一子集都不是有和集合。依据 $\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_{n-1}\}$ 可以构造 $\{1,2,\cdots,3S_{n-1}-2\}$ 的一个划分 $\{B_1,B_2,\cdots,B_{n-1},B_n\}$ 如下：

$$\begin{aligned}B_i&=\{3a,3a-1\mid a\in A_i\},\quad i=1,2,\cdots,n-1\\B_n&=\{3a-2\mid 1\leqslant a\leqslant S_{n-1}\}\end{aligned}$$

下证 $B_1,B_2,\cdots,B_{n-1},B_n$ 均不是有和集合。

B_n 中的两个数的和为 $3a-2+3b-2=3(a+b-1)-1$，而 $3(a+b-1)-1$ 这种形式的数只能在前 $n-1$ 个集合中，因此 B_n 不是有和集合。

给定一个 B_i（$i=1,2,\cdots,n-1$），考察它的两个数的和的形式，有以下 3 种情况，均说明 B_i 不是有和集合：

第一种情况：$3a+3b=3(a+b)$，若 $3(a+b)\in B_i$，则意味着 $a,b,a+b\in A_i$，与 A_i 不是有和集合矛盾；

第二种情况：$3a-1+3b-1=3(a+b)-2$，而 $3(a+b)-2$ 形式的数只存在于 B_n 中；

第三种情况：$3a+(3b-1)=3(a+b)-1$，若 $3(a+b)-1\in B_i$，则意味着 $a,b,a+b\in A_i$，与 A_i 不是有和集合矛盾。

8. 学校某社团有 66 名同学，来自 4 个省份，用 1 到 66 的这 66 个整数对他们进行编号。证明：无论怎么编号，都至少有一名同学，他的编号或者等于来自同一省份的另外某两名同学编号的和、或者等于来自同一省份的另外某一位同学编号的两倍。

证明：

令 $\{S_1,S_2,S_3,S_4\}$ 是 $\{1,2,\cdots,66\}$ 的任一 4–划分。由鸽巢原理知：至少有一个子集至少有 17 个元素，不妨设是 S_1，这 17 个元素为

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{17}，且\ a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{17}$$

构造 16 个数：$a_{17}-a_i$，$i=1,2,\cdots,16$，若有一个在 S_1 中，则结论得证；若均不在 S_1 中，则它们就在 S_2 或 S_3 或 S_4 中。继续由鸽巢原理知：这 16 个元素中至少有 $\lceil\frac{16}{3}\rceil=6$ 个元素在同一集合中，不妨令它们在 S_2 中，记这 6 个元素为

$$b_1,b_2,\ldots,b_6，且\ b_1<b_2<\cdots<b_6$$

继续构造 5 个数：b_6-b_i，$i=1,2,\cdots,5$，若有一个在 S_2 中，则结论得证；若均不在 S_2 中（则它们也不在 S_1 中），则它们就在 S_3 或 S_4 中。继续由鸽巢原理知：这 5 个元素中至少有 $\lceil\frac{5}{2}\rceil=3$ 个元素在同一集合中，不妨令它们在 S_3 中，记这 3 个元素为

$$c_1,c_2,c_3，且\ c_1<c_2<c_3$$

继续构造 2 个数：$d_1=c_3-c_1,d_2=c_3-c_2$，若有一个在 S_3 中，则结论得证；若均不在 S_3 中，则易证它们也不在 S_2 和 S_1 中，则它们均在 S_4 中。再

构造一个数：$d_1 - d_2$，则该数一定在 S_4 中，否则它也不会在 S_3 中，也不会在 S_2 和 S_1 中，它就无处可在，产生矛盾。注意，上面构造的这些数也都是 1 至 66 之间的数。

9. 已知 $a \geqslant t$，证明 $R(a,t;t) = R(t,a;t) = a$。

证明：

显然，当 $t = a$ 时结论成立。下面考虑 $t < a$ 的情况。

对于含有 $a-1$ 个顶点的 t–均齐完全超图，用红蓝两色对所有超边任意着色，可以给出下面一种着色方案，使得其中既没有红色的含 a 个顶点的 t–均齐完全子超图，也没有蓝色的含 t 个顶点的 t–均齐完全子超图，这种着色方案为：将所有的超边着成红色。所以，$R(a,t;t) > a-1$。

对于含有 a 个顶点的 t–均齐完全超图，用红蓝两色对所有超边任意着色，任一种着色方案，要么着出了一个红色的含 a 个顶点的 t–均齐完全超图，要么着出了一个蓝色的含 t 个顶点的 t–均齐完全子超图，这是因为：一个含有 t 个顶点的 t–均齐完全子超图有且只有一条超边，所以，如果着色方案中有一条超边着成了蓝色，就着出了一个蓝色的含 t 个顶点的 t–均齐完全子超图，否则，即所有超边都着成了红色，则整个图就是红色的。所以，$R(a,t;t) = a$。

10. 证明：$R(a_1, a_2, \cdots, a_n; 1) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n + 1$。

证明：

广义拉姆齐数的定义处已给出。

11. 使用定理 4.10 证明：对一个充分大的素数 p，存在 x、y、$z \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$ 满足 $x^n + y^n \equiv z^n \pmod{p}$。

证明：略。请阅读书中所列的参考文献 [45]。

12. 试编程求解图的香农容量。

证明：略。

第五章　生成函数之习题与答案

1. 利用生成函数证明：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)(-1)^k=2[n=2]。$$

证明：

对等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$$

进行两次微分可得：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2}=n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

即：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k}=n(n-1)(1+x)^{n-2}\cdot x^2$$

令 $x=-1$，则有：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)(-1)^k=n(n-1)0^{n-2}\cdot(1-1)^2=n(n-1)0^{n-2}=2[n=2]$$

2. 利用生成函数证明：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}=\frac{1}{n+1}。$$

证明：

对等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$$

的左右两边分别积分有：

$$\int_0^x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k\,dt=\int_0^x(1+t)^n\,dt$$

即：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}=\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}$$

令 $x=-1$，则：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}=-\frac{1}{n+1}$$

从而有：

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k}}{k+1}=\frac{1}{n+1}$$

3. 已知 $n\geqslant 0$，使用归纳法，基于生成函数的卷积运算和朱世杰恒等式证明：

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n+k}{n}x^k=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}。$$

证明：

当 $n=0$ 时，

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k\geqslant 0}x^k=\sum_{k\geqslant 0}\binom{k}{0}x^k$$

显然结论成立。假设当 $n=t$ 时，满足

$$\frac{1}{(1-x)^{t+1}}=\sum_{k\geqslant 0}\binom{t+k}{t}x^k$$

那么当 $n=t+1$ 时，有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^{t+2}}&=\frac{1}{(1-x)^{t+1}}\cdot\frac{1}{1-x}=\sum_{k\geqslant 0}\binom{t+k}{t}x^k\cdot\sum_{k\geqslant 0}x^k\\&=\sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{t+l}{t}\right)x^k\end{aligned}$$

而

$$\sum_{l=0}^{k}\binom{t+l}{t}=\sum_{j=t}^{t+k}\binom{j}{t}=\binom{k+t+1}{t+1}-\binom{t}{t+1}=\binom{t+1+k}{t+1}$$

故：

$$\frac{1}{(1-x)^{t+2}}=\sum_{k\geqslant 0}\binom{t+1+k}{t+1}x^k$$

4. 证明：

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{H(k)}{2^k}=\ln 4。$$

证明：

已知

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}=\sum_{k\geqslant 0}H(k)x^k$$

将 $x=\frac{1}{2}$ 代入上式，则有：

$$\sum_{k\geqslant 0}\frac{H(k)}{2^k}=2\ln 2=\ln 4$$

5. 已知 $n\geqslant 0$，证明：

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\ln\frac{1}{1-x}=\sum_{k\geqslant 0}\big(H(n+k)-H(n)\big)\binom{n+k}{k}x^k。$$

证明：

当 $n=0$ 时，

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}=\sum_{k\geqslant 0}\big(H(k)-H(0)\big)\binom{k}{0}x^k=\sum_{k\geqslant 0}H(k)x^k$$

显然结论成立。

假设当 $n=m$ 时，

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}}\ln\frac{1}{1-x}=\sum_{k\geqslant 0}\big(H(m+k)-H(m)\big)\binom{m+k}{m}x^k$$

则当 $n=m+1$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^{m+2}}\ln\frac{1}{1-x}&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^{m+1}}\ln\frac{1}{1-x}\\&=\frac{1}{1-x}\sum_{k\geqslant 0}\big(H(m+k)-H(m)\big)\binom{m+k}{m}x^k\\&=\sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{l=0}^{k}\big(H(m+l)-H(m)\big)\binom{m+l}{m}\right)x^k\end{aligned}$$

下证

$$\sum_{l=0}^{k}\big(H(m+l)-H(m)\big)\binom{m+l}{m}=\big(H(m+1+k)-H(m+1)\big)\binom{m+1+k}{m+1}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{k}\big(H(m+l)-H(m)\big)\binom{m+l}{l}\\
&=\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{1}+\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}\right)\binom{m+2}{2}+\cdots\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+k}\right)\binom{m+k}{k}\\
&=\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{k}\binom{m+i}{i}+\frac{1}{m+2}\sum_{i=2}^{k}\binom{m+i}{i}+\cdots+\frac{1}{m+k}\sum_{i=k}^{k}\binom{m+i}{i}\\
&=\frac{1}{m+1}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{m+i}{i}-\sum_{i=0}^{0}\binom{m+i}{i}\right)+\\
&\quad\frac{1}{m+2}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{m+i}{i}-\sum_{i=0}^{1}\binom{m+i}{i}\right)+\cdots+\\
&\quad\frac{1}{m+k}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{m+i}{i}-\sum_{i=0}^{k-1}\binom{m+i}{i}\right)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m+i}\right)\sum_{i=0}^{k}\binom{m+i}{i}-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\sum_{i=0}^{1}\binom{m+i}{i}-\cdots\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{m+k}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{m+i}{i}\\
&=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m+i}\binom{m+k+1}{k}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m+i}\binom{m+i}{i-1}\\
&=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m+i}\binom{m+k+1}{k}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m+1}\left(1-\frac{i-1}{m+i}\right)\binom{m+i}{i-1}\\
&=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m+i}\binom{m+k+1}{k}-\frac{1}{m+1}\binom{m+k}{k-1}\\
&=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m+i}\binom{m+k+1}{k}-\frac{1}{m+1}\frac{k}{m+k+1}\binom{m+k+1}{k}\\
&=\binom{m+k+1}{k}\left(\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\cdots+\frac{1}{m+k+1}\right)\\
&=\binom{m+k+1}{k}\big(H(m+k+1)-H(m+1)\big)
\end{aligned}
$$

6. 参考本章介绍的生成函数的几种运算，探讨指数型生成函数的相关运算。

解：

数列 $\{a_k\}_{k\geqslant 0}$ 的指数型生成函数为：

$$\widehat{\mathcal{G}}(x) \triangleq \sum_{k\geqslant 0} a_k \frac{x^k}{k!}$$

(1) 常系数线性组合（c_1, c_2 为任意常数）：

$$c_1\widehat{\mathcal{G}}_1(x) + c_2\widehat{\mathcal{G}}_2(x) = \sum_{k\geqslant 0} (c_1 a_k + c_2 b_k) \frac{x^k}{k!}$$

(2) 变量替换（c 为常数）：

$$\widehat{\mathcal{G}}(cx) = \sum_{k\geqslant 0} a_k \frac{(cx)^k}{k!} = \sum_{k\geqslant 0} c^k a_k \frac{x^k}{k!}$$

为数列 $\langle c^k a_k\rangle_{k\geqslant 0}$ 的生成函数。

(3) 微分：

$$\widehat{\mathcal{G}}'(x) = a_1 + 2a_2\frac{x}{2!} + 3a_3\frac{x^2}{3!} + \cdots = \sum_{k\geqslant 0} a_{k+1}\frac{x^k}{k!}$$

为数列 $\langle a_1, a_2, a_3, \cdots\rangle$ 的生成函数。

(4) 左移（$m \geqslant 1$）：

从上述微分操作可以看出，进行一次微分相当于原序列左移了一位，因此要左移 m 位，只需进行 m 次微分即可：

$$\widehat{\mathcal{G}}^{(m)}(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_{k+m}\frac{x^k}{k!}$$

为数列 $\langle a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots\rangle$ 的生成函数。

(5) 积分：

$$\int_0^x \widehat{\mathcal{G}}(t)dt = a_0\frac{x}{1!} + a_1\frac{x^2}{2!} + a_2\frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k\geqslant 1} a_{k-1}\frac{x^k}{k!}$$

为数列 $\langle 0, a_0, a_1, a_1, \cdots\rangle$ 的生成函数。

(6) 右移（$m \geqslant 1$）：

m 次积分后就实现了右移 m 位。

(7) 卷积：

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{G}}_1(x)\widehat{\mathcal{G}}_2(x) &= (a_0 + a_1x + a_2\frac{x^2}{2!} + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2\frac{x^2}{2!} + \cdots) \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{a_l}{l!}\frac{b_{k-l}}{(k-l)!}\right)x^k \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}a_lb_{k-l}\right)\frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

是 $\langle\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}a_lb_{k-l}\rangle_{k\geqslant 0}$ 的生成函数。

7. 已知两个取非负整数值的离散型随机变量 X 和 Y 的生成函数分别为 $\widetilde{\mathcal{G}}_1(x)$ 和 $\widetilde{\mathcal{G}}_2(x)$。证明：若它们是独立的，则它们的和 $X+Y$ 的生成函数为 $\widetilde{\mathcal{G}}_1(x)\widetilde{\mathcal{G}}_2(x)$。

证明：

假设随机变量的取值为 0、1、2、$\cdots$。随机变量 X 与 Y 的生成函数分别记为：

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1(x) &= \sum_{k\geqslant 0}Pr(X=k)x^k \\ \mathcal{G}_2(x) &= \sum_{k\geqslant 0}Pr(Y=k)x^k\end{aligned}$$

由于 X 与 Y 是独立的，则：$Pr(X=m,Y=n) = Pr(X=m)\cdot Pr(Y=n)$。所以，$X+Y$ 的生成函数为：

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{X+Y}(x) &= \sum_{k\geqslant 0}Pr(X+Y=k)x^k \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\Big(\sum_{l=0}^{k}Pr(X=l,Y=k-l)\Big)x^k \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\Big(\sum_{l=0}^{k}Pr(X=l)Pr(Y=k-l)\Big)x^k \\ &= \mathcal{G}_1(x)\mathcal{G}_2(x)\end{aligned}$$

8. 针对随机变量 $X\sim\mathcal{B}(n,q)$，求其 3–阶矩 ν_3 和累积量 κ_3。

证明：

由 $X\sim\mathcal{B}(n,q)$，可得：

$$Pr(X=k) = \binom{n}{k}q^k(1-q)^{n-k}$$

计算得：

$$\nu_1 = \sum_{k=0}^{n} \Pr(X=k)k = nq$$

$$\nu_2 = \sum_{k=0}^{n} \Pr(X=k)k^2 = nq - nq^2 + n^2q^2$$

$$\nu_3 = \sum_{k=0}^{n} \Pr(X=k)k^3 = nq - 3nq^2 + 2nq^3 + 3n^2q^2 - 3n^2q^3 + n^3q^3$$

$$\begin{aligned}\kappa_3 &= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 \\ &= nq - 3nq^2 + 2nq^3 + 3n^2q^2 - 3n^2q^3 + n^3q^3 - 3nq(nq - nq^2 + n^2q^2) + 2(nq)^3 \\ &= nq - 3nq^2 + 2nq^3\end{aligned}$$

第六章　递归关系之习题与答案

1. 求如下递归关系：

$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + n^3, \\ f(0) = 0。 \end{cases}$$

（提示：将每一项逐步展开。）

解：

$f(n) = f(n-1)+n^3 = f(n-2)+(n-1)^3+n^3 = \cdots = f(0)+1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

由于 $f(n) = 0$，所以

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. 求如下递归关系：

$$\begin{cases} f(n) = 3f(n-1) + 4^{n-1}, \\ f(0) = \frac{1}{4}。 \end{cases}$$

解：

方法一：

令 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$，则有：

$$g(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[3f(n-1) + 4^{n-1}\right] x^n$$

$$= \frac{1}{4} + 3xg(x) + x\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n = \frac{1}{4} + 3xg(x) + \frac{x}{1-4x}$$

故:

$$g(x) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{x}{1-4x}}{1-3x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-4x)(1-3x)} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{1-4x} - \frac{3}{1-3x}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(4^n - \frac{3}{4}\cdot 3^n\right)x^n$$

从而：

$$f(n) = \frac{4^{n+1} - 3^{n+1}}{4}$$

方法二：

因为 $f(n)=3f(n-1)+4^{n-1}$，所以 $f(n-1)=3f(n-2)+4^{n-2}$，两边同乘以 4 得 $4f(n-1)=12f(n-2)+4^{n-1}$，所以有：$f(n)=7f(n-1)-12f(n-2)$。然后利用特征方程的方法可求解。

3. 求如下递归关系：

$$\begin{cases} f(n)=4f^3(n-1), \\ f(0)=0。 \end{cases}$$

（提示：通过取对数进行将阶。）

解：

因为 $f(n)=4f^3(n-1)$ 且 $f(0)=1$，所以 $\forall n\in\{1,2,\cdots,\}$：$f(n)>1$。从而可以对递归关系等式两边取对数：

$$\ln f(n)=3\ln f(n-1)+\ln 4$$

则

$$\ln f(n)+\ln 2=3\left(\ln f(n-1)+\ln 2\right)$$

从而

$$\ln f(n)+\ln 2=3^n\left(\ln f(0)+\ln 2\right)=3^n\ln 2$$

$$\ln f(n)=(3^n-1)\ln 2=\ln 2^{3^n-1}$$

故

$$f(n)=2^{3^n-1}$$

4. 规定 $F(-1)=1$，证明：

$$\forall m\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}：F(m+n)=F(m)F(n+1)+F(m-1)F(n)。$$

证明：

（使用归纳法）当 $m=0$ 时，$\forall n\in\mathbb{N}$：

$$F(n+0)=F(0)F(n+1)+F(-1)F(n)=F(n)$$

显然结论成立。假设当 $m=k$ 时结论成立，即 $\forall n\in\mathbb{N}$：

$$F(k+n)=F(k)F(n+1)+F(k-1)F(n)$$

则，当 $m=k+1$ 时，$\forall n\in\mathbb{N}$：

$$\begin{aligned}F(k+1+n)&=F(k+n+1)\\&=F(k)F(n+2)+F(k-1)F(n+1)\\&=\big(F(k)F(n+1)+F(k)F(n)\big)+F(k-1)F(n+1)\\&=\big(F(k)+F(k-1)\big)F(n+1)+F(k)F(n)\\&=F(k+1)F(n+1)+F(k)F(n)\end{aligned}$$

结论也成立。

5. 证明当 $k\geqslant 0$ 时：

$$\mathcal{A}(1,k)=k+2、\mathcal{A}(2,k)=2k+3、\mathcal{A}(3,k)=2^{k+3}-3、\mathcal{A}(4,k)=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{k+3次}-3。$$

证明：

阿克曼函数的递归关系为：

$$\mathcal{A}(n,k)=\begin{cases}k+1 & n=0,k\geqslant 0\\ \mathcal{A}(n-1,1) & n>0,k=0\\ \mathcal{A}(n-1,A(n,k-1)) & n>0,k>0\end{cases}$$

(1) 当 $k=0$ 时，$\mathcal{A}(1,0)=\mathcal{A}(1,0)=\mathcal{A}(0,1)=2$，结论成立。当 $k>0$ 时，$\mathcal{A}(1,k)=A(0,\mathcal{A}(1,k-1))=\mathcal{A}(1,k-1)+1$，将这一递归关系逐步展开就得到：

$$\mathcal{A}(1,k)=\mathcal{A}(1,0)+k=\mathcal{A}(0,1)+k=k+2$$

(2) 当 $k=0$ 时，$\mathcal{A}(2,0)=\mathcal{A}(1,1)=1+2=3$，结论成立。当 $k>0$ 时，$\mathcal{A}(2,k)=\mathcal{A}(1,A(2,k-1))=\mathcal{A}(2,k-1)+2$，将这一递归关系也逐步展开就得到：

$$\mathcal{A}(2,k)=\mathcal{A}(2,0)+2k=2k+3$$

(3) 当 $k=0$ 时，$\mathcal{A}(3,0)=\mathcal{A}(2,1)=2\times 1+3=5=2^3-3$，结论成立。当 $k>0$ 时，$\mathcal{A}(3,k)=\mathcal{A}(2,A(3,k-1))=2\mathcal{A}(3,k-1)+3$，将这一递归关系也逐步展开就得到：

$$\mathcal{A}(3,k)=2^k\mathcal{A}(3,0)+3\sum_{j=0}^{k-1}2^j=2^{k+3}-3$$

(4) 当 $k=0$ 时，$\mathcal{A}(4,0)=\mathcal{A}(3,1)=2^{1+3}-3=13=2^{2^2}-3$，结论成立。当 $k>0$ 时，$\mathcal{A}(4,k)=\mathcal{A}(3,\mathcal{A}(4,k-1))=2^{\mathcal{A}(4,k-1)+3}-3$，将这一递归关系也逐步展开就得到：

$$\mathcal{A}(4,k)=\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{k+3\text{次}}-3$$

6. 证明：

$$\forall m\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}:\ \gcd(F(m),F(n))=F(\gcd(m,n))。$$

其中：$\gcd(\cdot,\cdot)$ 表示两个自然数的最大公因子，并规定任何自然数与 0 的最大公因子为该自然数本身。

证明：

首先要用到求解最大公约数的欧几里得算法（Euclid's algorithm）中所使用的递归关系（该递归关系为什么能够求出两个整数的最大公约数，其证明留给读者思考或查阅书本中的参考文献[1]）：

$$\forall m>0:\ \gcd(m,n)=\gcd(n,m\bmod n),\ \gcd(0,n)=n$$

再者，要用到这样一个结论：

$$\gcd(F(m),F(n))=\gcd(F(n),F(m\bmod n))$$

该结论的证明如下：依据第 4 题知：

$$F(m)=F(n+m-n)=F(n)F(m-n+1)+F(n-1)F(m-n)$$

所以 $F(n)$ 与 $F(m)$ 的最大公倍数就是 $F(n)$ 与 $F(n-1)F(m-n)$ 的最大公倍数；又因为任何两个相邻的斐波那契数是互素的（利用反证法易证，此处省略，留个读者），所以 $F(n)$ 与 $F(n-1)F(m-n)$ 的最大公倍数即为 $F(n)$ 与 $F(m-n)$ 的最大公倍数。所以 $\gcd(F(m),F(n))=\gcd(F(m-n),F(n))$，如此下去就有

$$\begin{aligned}\gcd(F(m),F(n))&=\gcd(F(m-n),F(n))\\&=\gcd(F(m-2n),F(n))\\&=\cdots\\&=\gcd(F(m\bmod n),F(n))\end{aligned}$$

基于以上结论，利用归纳法证明该题：

当 $n=0$ 时，$\gcd(F(m),F(0))=\gcd(F(m),0)=F(m)=F(\gcd(m,0))$，显然成立。当 $m=n$ 时，$\gcd(F(m),F(n))=F(m)=F(\gcd(m,n))$，也显然成立。假设 $\forall k\leqslant m$ 和 $\forall l\leqslant n$ 均有：$\gcd(F(k),F(l))=F(\gcd(k,l))$。那么当 $k>m$ 或 $l>n$ 时：

$$\gcd(F(k),F(l))=\gcd(F(l),F(k \mod l))=F(\gcd(l,k \mod l))=F(\gcd(k,l))$$

7. 已知二元运算 $\bullet$ 不满足结合律，即，

$$(a_1\bullet a_2)\bullet a_3\neq a_1\bullet(a_2\bullet a_3)。$$

问 $a_1\bullet a_2\bullet a_3\bullet\cdots\bullet a_n$ 有多少种不同的运算方案？

解：

设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 有 $f(n)$ 种不同的运算方案。设最后一次运算形式为:

$$(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_j)(a_{j+1}\cdot a_{j+2}\cdot\cdots\cdot a_n)\quad(j=1,2,\cdots,n-1)$$

则该运算共有 $f(j)\cdot f(n-j)$ 种运算方案。即

$$f(n)=\sum_{j=1}^{n-1}f(j)f(n-j)\quad,\text{且}\quad f(1)=f(2)=1$$

借鉴第 2 章第 2 题的解法，利用生成函数的求解递归关系的方法可求得：

$$f(n)=\frac{1}{4n-2}\binom{2n}{n}$$

8. 求有 n 个叶子节点的完全二叉树的个数。（提示：与上一问题建立一一对应关系。）

解：

下面建立 n 个叶子的完全二叉树同题 7 中 n 个数乘积的加括号方法之间的一一对应关系。

将完全二叉树的 n 个叶子按顺序分别用 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 来标记。设 v 是二叉树的一个内结点，若 v 的两个孩子分别标记为 x_1,x_2，则 v 标记为 (x_1x_2)。如此，该二叉树的根的标记对应于 n 个数的乘积 $a_1a_2\cdots a_n$ 的一种加括号的方法，显然二者之间构成一一对应。

故 n 个节点的完全二叉树个数为

$$\frac{1}{4n-2}\binom{2n}{n}$$

9. 从组合意义上证明：

(1) $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1$；

(2) $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \left[{n \atop n-1} \right] = \binom{n}{2}$。

证明：

(1)

左边意味着将一个 n–元集合划分为 2 个非空子集的方案数。对 n–元集合中每一个元素都有两个去处：S_1 或 S_2，共 2^n 种选择。S_1 与 S_2 无序，故实际上有 2^{n-1} 种划分方案。再将一个为空集、一个为全集的划分方案去除，则划分为 2 个非空子集的方案数应当为 $2^{n-1} - 1$，恰好为右边。

(2)

$\left\{ {n \atop n-1} \right\}$ 意味着将 n–元集划分成 $n-1$ 个非空子集的方案数。则该 n 个集合中有一个集合有 2 个元素，其余均为一个元素。因此，这相当于从 n 个元素里选取 2 个元素构成一个集合（共有 $\binom{n}{2}$ 种），固定一种取法后，剩下 $n-2$ 元素每个都单独成为一子集（有且只有一种），从而由乘法原则知划分方案为 $\binom{n}{2}$，恰好为右边。

$\left[{n \atop n-1} \right]$ 指由 n 个不同元素构成 $n-1$ 个圆排列的所有方案数。这样的一个方案中只有一个圆排列有 2 个元素，而其他任一个圆排列都只有一个元素。可以理解为先划分为 $n-1$ 个非空子集，给定一种划分（共 $\left\{ {n \atop n-1} \right\}$ 种），对每一个子集考虑它的圆排列的数目（然后用乘法元则），巧的是，给定 2 个元素所形成的圆排列数也只有 1 种，而给定 1 个元素所形成的圆排列数也只有 1 种，因此所构成 $n-1$ 个圆排列的所有方案数即为 $\left\{ {n \atop n-1} \right\} \prod_{k=1}^{n-1} 1 = \left\{ {n \atop n-1} \right\}$。

10. 证明：

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}。$$

证明：

首先定义：$x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$，$\forall k > 0$；规定 $x^{\underline{0}} = 1$。

当 $n = 0$ 时，

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \left\{ {0 \atop 0} \right\} x^{\underline{0}} = 1$$

结论成立。假设当 $n = m$ 时，有

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {m \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$$

则当 $n=m+1$ 时，有

$$x^{m+1}=x\cdot x^m=x\sum_{k=0}^{m}\begin{Bmatrix}m\\k\end{Bmatrix}x^{\underline{k}}=\sum_{k=0}^{m}\begin{Bmatrix}m\\k\end{Bmatrix}x\cdot x^{\underline{k}}$$

又因为 $x\cdot x^{\underline{k}}=(x-k+k)x^{\underline{k}}=(x-k)x^{\underline{k}}+kx^{\underline{k}}=x^{\underline{k+1}}+kx^{\underline{k}}$，所以

$$\begin{aligned}x^{m+1}&=\sum_{k=0}^{m}\begin{Bmatrix}m\\k\end{Bmatrix}(x^{\underline{k+1}}+kx^{\underline{k}})\\&=\sum_{k=0}^{m}\begin{Bmatrix}m\\k\end{Bmatrix}x^{\underline{k+1}}+\sum_{k=0}^{m}\begin{Bmatrix}m\\k\end{Bmatrix}k\cdot x^{\underline{k}}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}\begin{Bmatrix}m\\k-1\end{Bmatrix}x^{\underline{k}}+\sum_{k=1}^{m+1}\begin{Bmatrix}m\\k\end{Bmatrix}k\cdot x^{\underline{k}}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}\left(\begin{Bmatrix}m\\k-1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}m\\k\end{Bmatrix}k\right)x^{\underline{k}}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}\begin{Bmatrix}m+1\\k\end{Bmatrix}x^{\underline{k}}\\&=\sum_{k=0}^{m+1}\begin{Bmatrix}m+1\\k\end{Bmatrix}x^{\underline{k}}\end{aligned}$$

11. 证明：

$$n!=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^n。$$

证明：

由二项式定理得：

$$(e^x-1)^n=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}e^{(n-j)x}$$

两边对 x 进行 n 次求导。右边即为

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^ne^{(n-j)x}$$

观察左边情况。进行一次求导后的结果为：

$$ne^x(e^x-1)^{n-1}$$

再进行一次求导后的结果为：

$$n(n-1)e^{2x}(e^x-1)^{n-2}+ne^x(e^x-1)^{n-1}$$

如此下去，进行 n 次求导后，这些累加和中有一项为 $n!e^{nx}$，而其余的累加项中均含有一个因子 (e^x-1)。因此，令 $e^x=1$，则左边即为 $n!$，而右边即为

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^n$$

注：该等式还可以利用下一章所讲的容斥原理来证明，可参考文献[17]中第 67 个等式的证明。

12. 证明：

$$\sum_{k=0}^{n-1}H(k)=nH(n)-n。$$

证明：

当 $n=1$ 时，左边等于 $H(0)=0$，右边等于$H(1)-1=0$，显然成立。假设当 $n=m$ 时，有

$$\sum_{k=0}^{m-1}H(k)=mH(m)-m$$

那么当 $n=m+1$ 时，等式也成立，因为：

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}H(k)&=\sum_{k=0}^{m-1}H(k)+H(m)=mH(m)-m+H(m)\\&=(m+1)H(m)-m=(m+1)\left(H(m+1)-\frac{1}{m+1}\right)-m\\&=(m+1)H(m+1)-1-m\\&=(m+1)H(m+1)-(m+1)\end{aligned}$$

13. 使用生成函数求解斐波那契数的递归关系。

解：

斐波那契数的递归关系：

$$\begin{cases}F(n)=F(n-1)+F(n-2)\quad(n\geqslant 2)\\F(0)=0,F(1)=1\end{cases}$$

构造生成函数：$\mathcal{G}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F(n)x^n$，则

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}F(n)x^n=F(0)+F(1)x+\sum_{n=2}^{\infty}F(n)x^n\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}F(n-1)x^n+\sum_{n=2}^{\infty}F(n-2)x^n\\&=x+x\sum_{n=1}^{\infty}F(n)x^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}F(n)x^n\\&=x+x\sum_{n=0}^{\infty}F(n)x^n+x^2\sum_{n=0}^{\infty}F(n)x^n=x+x\mathcal{G}(x)+x^2\mathcal{G}(x)\end{aligned}$$

从而解得：

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x)&=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n\right)\end{aligned}$$

故：

$$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

14. 使用生成函数求解卡特兰数的递归关系。

解：

卡特兰数递归关系为：

$$\begin{cases}f(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k-1)f(n-k) & (n\geqslant 1)\\ f(0)=1 & (n=0)\end{cases}$$

构造生成函数：$\mathcal{G}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n$，则

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[f(0)f(n-1)+f(1)f(n-2)+\cdots+f(n-1)f(0)\right]x^n\\&=1+x\mathcal{G}(x)^2\end{aligned}$$

从而解得：

$$\mathcal{G}(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

而

$$\sqrt{1-4x}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$$

所以：

$$\mathcal{G}(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

故

$$f(n)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

15. 编写单线程与多线程程序分别实现快速排序，并测试比较它们的时间性能。

解：略。

16. 众所周知，n 个盘子的汉诺塔问题的解为：$T(n)=2^n-1$，$n\geqslant 0$。试证明：为什么 2^n-1 步移动是充分且必要的？

证明：

设移动 n 个盘子需要的最少步数为 $T(n)$。三根柱子分别记为 A、B、C，现在将放在 A 柱子上的 n 个盘子借助于 C 柱子移动到 B 柱子上。

充分性。任意给出一种可行的移动方案，其所用的步数一定是大于或等于 $T(n)$。下面给出一种移动方案：将 A 上的前 $n-1$ 个盘子先借助于 B 移动到 C 上（其最少步数为 $T(n-1)$），然后将 A 上的那个最大的盘子移动到 B 上（只需一步），然后再将 C 上的 $n-1$ 个盘子借助于 A 移动到 B 上（其最少步数为 $T(n-1)$）。而这种移动方案的步数为：$2T(n-1)+1$，所以有 $T(n)\leqslant 2T(n-1)+1$。

必要性。要将 A 柱子上 n 个盘子移动到 B 柱子上，必须将最大的盘子移动到 B 上，而将最大的盘子移动到 B 上必须先将上面的 $n-1$ 个盘子移动到 C 上，完成这些最少要用 $T(n-1)+1$，然后再将 C 上的 $n-1$ 个盘子移动到 B 上，最少有用了 $T(n-1)$ 步。因此 $T(n)\geqslant 2T(n-1)+1$。

从而可得：$T(n)=2T(n-1)+1$，而 $T(0)=0$、$T(1)=1$。通过解此递归关系就得到：$T(n)=2^n-1$。

第七章　容斥原理之习题与答案

1. 使用容斥原理证明例 7.2，并证明 $I(n)=D(n)+D(n-1)$。

证明：

例 7.2：

$$I(n)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!$$

设 S 为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有全排列的集合，则 $|S|=n!$。定义性质 P_j：$j(j+1)$ 出现，令 A_j 为 S 中满足性质 P_j 的全排列的集合，$j=1,2,\cdots,n-1$。则

$$|A_j|=(n-1)!,\quad |A_j\cap A_k|=(n-2)!,\quad |A_j\cap A_k\cap A_l|=(n-3)!,\cdots$$

由容斥原理得：

$$\begin{aligned}I(n)&=|S|-\sum_{k=1}^{n-1}|A_k|+\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n-1}|A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}|\\&=n!-\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}(n-1)!\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!\end{aligned}$$

因为

$$D(n)=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$$

所以

$$\begin{aligned}D(n)+D(n-1)&=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}+(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{k!}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(n!+(n-1)!)\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^n\\&=(n+1)(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}+(-1)^n\end{aligned}$$

对 $I(n)$ 进行处理得：

$$\begin{aligned}
I(n) &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)! = (n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}(n-k)\\
&= (n-1)!\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k k}{k!}\right)\\
&= (n-1)!\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k}{k!}\right)\\
&= (n-1)!\left(n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)\\
&= (n+1)(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} - (-1)^{n-1}\\
&= (n+1)(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^n\\
&= D(n) + D(n-1)
\end{aligned}$$

2. 证明 $\langle D(n)\rangle_{n\geqslant 0}$ 的指数型生成函数为

$$\frac{1}{1-x}e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}D(n)\frac{x^n}{n!},$$

并证明由该生成函数可以构造出递归关系 (7.3) 和 (7.4)，其中 $D(n)$ 是错排计数公式 (7.2) 且规定 $D(0)=1$。

证明：

因为：

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

所以

$$\frac{1}{1-x}e^{-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)x^n$$

对所证等式右边整理可得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}D(n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)x^n = \frac{1}{1-x}e^{-x}$$

下面给出第二问的证明。

公式 (7.3) 为：$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$

公式 (7.4) 为：$D(n) - nD(n-1) = (-1)^n$

因为

$$\frac{1}{1-x}e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} D(n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} D(n)\frac{n+1}{x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

所以

$$\frac{x}{1-x}e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} D(n)(n+1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} nD(n-1)\frac{x^n}{n!}$$

继续相应的操作可得：

$$\frac{x^2}{1-x}e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)D(n-2)\frac{x^n}{n!}$$

因此就有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} = e^{-x} = \frac{1}{1-x}e^{-x} - \frac{x}{1-x}e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(D(n) - nD(n-1)\right)\frac{x^n}{n!}$$

所以

$$D(n) - nD(n-1) = (-1)^n$$

进而有：$D(n-1) - (n-1)D(n-2) = (-1)^{n-1}$ 上面两式相加得：

$$D(n) = (n-1)\left(D(n-1) + D(n-2)\right)$$

3. 例 7.2 考虑禁止模式“12”、“23”、$\cdots$、“$(n-1)n$”；如果再增加一个禁止模式“$n1$”，计数公式将如何？

解：

设 S 为集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的所有全排列的集合，则 $|S| = n!$。定义性质 P_j 为模式 $j(j+1)$ 出现，$j = 1, 2, \cdots, n-1$；定义 P_n 为模式 $n1$ 出现。令 A_j 为 S 中满足性质 P_j 的全排列的集合，$j = 1, 2, \cdots, n$。则

$$|A_j| = (n-1)!, \quad |A_j \cap A_k| = (n-2)!, \quad |A_j \cap A_k \cap A_l| = (n-3)!, \cdots$$

由容斥原理得：

$$\begin{aligned} I'(n) &= |S| - \sum_{k=1}^{n} |A_k| + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\ &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n \binom{n-1}{n}(n)! \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! \end{aligned}$$

4. 可将错排计数问题一般化：n–元集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 k–元排列数，要求每个这种排列恰好有 r 个元素在其自然位置上，$n \geqslant k \geqslant r$。这个排列数记为 $D(n, k, r)$。显然，$D(n, n, 0)$ 即为本章所讲的错排数 $D(n)$。

(1) 使用容斥原理证明：

$$D(n, k, 0) = \frac{1}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}(n-j)!。$$

(2) 证明如下递归关系成立：

$$D(n, k, r) = \binom{k}{r} D(n-r, k-r, 0)。$$

(3) 基于 (1) 和 (2) 证明：

$$D(n, k, r) = \frac{\binom{k}{r}}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{k-r} (-1)^j \binom{k-r}{j}(n-r-j)!。$$

证明：

(1)

设 S 为集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的所有 k–元排列数，则 $|S| = \binom{n}{k}k!$。性质 P_j 表示一个 k–元排列第 j 个位置放置元素 j，令 A_j 为 S 中满足性质 P_j 的 k–元排列的集合，$j = 1, 2, \cdots, k$。则

$$\begin{aligned} |A_{j_1}| &= \binom{n-1}{k-1}(k-1)! && 1 \leqslant j_1 \leqslant k \\ |A_{j_1} \cap A_{j_2}| &= \binom{n-2}{k-2}(k-2)! && 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant k \\ &\vdots \\ |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \cdots \cap A_{j_k}| &= \binom{n-k}{k-k}(k-k)! && 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant k \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
D(n,k,0) &= |S| - \sum_{j=1}^{k} |A_j| + \sum_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant k} |A_{j_1} \cap A_{j_2}| - \cdots \\
&\qquad + (-1)^k \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant k} |\overline{A_{j_1}} \cap \overline{A_{j_2}} \cap \cdots \cap \overline{A_{j_k}}| \\
&= \binom{n}{k} k! - \binom{k}{1}\binom{n-1}{k-1}(k-1)! + \binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2}(k-2)! - \cdots \\
&\qquad + (-1)^k \binom{k}{k}\binom{n-k}{k-k}(k-k)! \\
&= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}\binom{n-j}{k-j}(k-j)! \\
&= \frac{1}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j}(n-j)!
\end{aligned}$$

(2)

设性质 Q_j 表示一个 k–元排列中有个 j 个元素在其自然位置上。令 B_j 为 S 中满足 Q_j 的 k–排列的集合。则

$$|B_j| = \binom{k}{j}\binom{n-j}{k-j}(k-j)!$$

$$\begin{aligned}
D(n,k,r) &= |B_r| - |B_{r+1}| + |B_{r+2}| - \cdots + (-1)^{k-r} |B_{r+k-r}| \\
&= \sum_{j=r}^{k} (-1)^{j-r} \binom{k}{j}\binom{n-j}{k-j}(k-j)! \\
&= \sum_{j=0}^{k-r} (-1)^j \binom{k}{j+r}\binom{n-j-r}{k-j-r}(k-j-r)! \\
&= \binom{k}{r} \sum_{j=0}^{k-r} (-1)^j \binom{k-r}{j}\binom{n-r-j}{k-r-j}(k-r-j)! \\
&= \binom{k}{r} \frac{1}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{k-r} (-1)^j \binom{k-r}{j}(n-r-j)! \\
&= \binom{k}{r} D(n-r, k-r, 0)
\end{aligned}$$

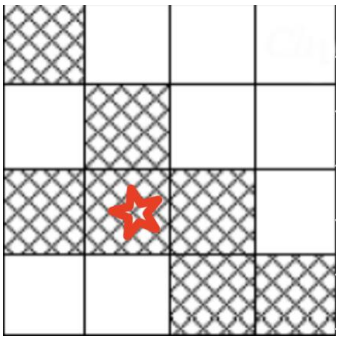
(3)

(2) 的推导过程中的倒数第二步即为该公式。

5. 寻找图 7.1（b）中小棋盘 Ch_1 的一个关键阴影块，并利用它求解 Ch_1 的棋子多项式。

解：

选取下图中红色五角星所在阴影块为关键阴影块。



所选取的 k 个阴影块不包含这个关键阴影块，将该阴影块变成非阴影块，形成新棋盘 Ch^*，生成函数为 $\mathcal{G}^*(x)$。

所选取的 k 个阴影块包含这个关键阴影块，将该阴影块所在行列阴影块变成非阴影块，形成新棋盘 Ch_*^*，生成函数为 $\mathcal{G}_*^*(x)$。

故

$$Ch(k) = Ch^*(k) + Ch_*^*(k-1)$$

$$\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}^*(x) + x\mathcal{G}_*^*(x)$$

另求得：

$$\mathcal{G}^*(x) = 1 + 6x + 11x^2 + 7x^3 + x^4$$

$$\mathcal{G}_*^*(x) = 1 + 3x + 2x^2$$

故其对应的棋子多项式为：$1 + 7x + 14x^2 + 9x^3 + x^4$。

注：也可以选择红色五角星左边的那个阴影块为关键阴影块，读者可自己试一下。

6. 将二重错排计数问题中所构造的棋子多项式 $g_n(x)$ 与 $f_n(x)$ 的系数构造成一个三角形（类似于杨辉三角形，$n = 2, 3, 4, \cdots$），写出该三角形的递归关系。

解：

已知：

$$f_3(x) = 1 + 4x + 3x^2$$
$$g_3(x) = 1 + 5x + 6x^2 + x^3$$
$$f_n(x) = g_{n-1}(x) + xf_{n-1}(x)$$
$$g_n(x) = f_n(x) + xg_{n-1}(x)$$

所以系数矩阵如下图：

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
$f_3(x)$	1	4	3	0				
$g_3(x)$	1	5	6	1	0			
$f_4(x)$	1	6	10	4	0			
$g_4(x)$	1	7	15	10	1	0		
$f_5(x)$	1	8	21	20	5	0		
$g_5(x)$	1	9	28	35	15	1	0	
$f_6(x)$	1	10	36	56	35	6	0	
$g_6(x)$	1	11	45	84	70	21	1	0

7. 证明公式 (7.32) 可被转化为：

$$Z(m,n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)m^{\frac{n}{d}}。$$

证明：

公式 (7.32)如下：

$$Z(m,n) = \sum_{d|n}\frac{1}{d}\sum_{d'|d}\mu(d')m^{\frac{d}{d'}}$$

欲证：

$$Z(m,n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)m^{\frac{n}{d}}$$

即证：

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)m^{\frac{n}{d}}=\sum_{d|n}\frac{1}{d}\sum_{d'|d}\mu(d')m^{\frac{d}{d'}}$$

即证：

$$\sum_{d|n}\varphi(d)m^{\frac{n}{d}}=n\sum_{d|n}\frac{1}{d}\sum_{d'|d}\mu(d')m^{\frac{d}{d'}}=\sum_{d|n}\frac{n}{d}\sum_{d'|d}\mu(d')m^{\frac{d}{d'}}$$

而

$$\sum_{d|n}\varphi(d)m^{\frac{n}{d}}=\sum_{d|n}m^{\frac{n}{d}}d\sum_{d'|d}\mu(d')\frac{1}{d'}=\sum_{d|n}m^{\frac{n}{d}}\sum_{d'|d}\mu(d')\frac{d}{d'}$$

即证：

$$\sum_{d|n}\frac{n}{d}\sum_{d'|d}\mu(d')m^{\frac{d}{d'}}=\sum_{d|n}m^{\frac{n}{d}}\sum_{d'|d}\mu(d')\frac{d}{d'}$$

若证上述等式成立，则只需证明：左右两边对 m 的同一幂次的系数来说对应相等即可。考虑 m^{d_0}。则左边 m^{d_0} 的系数为：

$$\sum_{d|n}\frac{n}{d}\mu\left(\frac{d}{d_0}\right)$$

右边 m^{d_0}的系数为：

$$\sum_{d'|\frac{n}{d_0}}\mu(d')\frac{\frac{n}{d_0}}{d'}=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{d}{d_0}\right)\frac{n}{d}$$

所以两边对应 m^{d_0} 的系数相同，因此等式成立。

8. 理论分析本章所讲的 TSP 求解方法的时间与空间复杂度，编程实现该方法。另外，因为矩阵运算可以并行化，所以试编写并行计算的程序。

解：略。

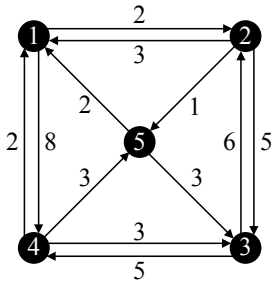


图 7.1 有 5 个顶点的加权有向图。

9. 利用最后一节所讲方法求上图的最小哈密尔顿回路。

解：略。

第八章　伯恩赛德计数定理和波利亚计数定理之习题与答案

1. 证明：一个群的单位元是唯一的，一个元素的逆元也是唯一的。

证明：

设 i' 与 i 是 $\langle G, \bullet \rangle$ 的两个单位元。因为 i 是单位元，所以 $i \bullet i' = i'$；又因为 i' 为单位元，所以 $i = i \bullet i'$。所以 $i = i \bullet i' = i'$。因此，$\langle G, \bullet \rangle$ 的单位元唯一。

设 a_1 与 a_2 都是 a 的逆元，则

$$a_1 \bullet (a \bullet a_2) = a_1 \bullet i = a_1$$

$$(a_1 \bullet a) \bullet a_2 = i \bullet a_2 = a_2$$

因为群的运算满足结合律，即$a_1 \bullet (a \bullet a_2) = (a_1 \bullet a) \bullet a_2$ 所以 $a_1 = a_2$。所以，每个元素的逆元唯一。

2. 令 $\mathbb{A}$ 是 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上所有置换的集合。证明：$(\mathbb{A}, \bullet)$ 是一个群，并且

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

是单位元，而置换 σ 的逆元满足：

$$\forall j \in A，若\ \sigma(j) = k，则\ \sigma^{-1}(k) = j。$$

证明：

(1) 封闭性:

对于任意两个置换 $\sigma, \tau \in \mathbb{A}$，它们的复合 $\sigma \bullet \tau$ 也是一个置换。因此，$\mathbb{A}$ 对复合运算 $\bullet$ 是封闭的。

(2) 结合律:

置换的复合运算满足结合律，即对于任意三个置换 $\sigma, \tau, \rho \in \mathbb{A}$，对于任意的 $a \in A$：

$$((\sigma \bullet \tau) \bullet \rho)(a) = (\sigma \bullet \tau)(\rho(a)) = \sigma(\tau(\rho(a)))$$

$$(\sigma \bullet (\tau \bullet \rho))(a) = \sigma((\tau \bullet \rho)(a)) = \sigma(\tau(\rho(a)))$$

即 $(\sigma \bullet \tau) \bullet \rho = \sigma \bullet (\tau \bullet \rho)$。

(3) 单位元:

恒等置换 σ_0 定义为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

对于任意置换 $\sigma \in \mathbb{A}$，有 $\sigma_0 \bullet \sigma = \sigma \bullet \sigma_0 = \sigma$。因此， σ_0 是单位元。

(4) 逆元:

对于任意置换 $\sigma \in \mathbb{A}$，存在一个逆置换 σ^{-1}，使得 $\sigma \bullet \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \bullet \sigma = \sigma_0$。逆置换 σ^{-1} 可以通过交换 σ 的行得到。

3. 证明：有限集 A 的两个不相交的轮换满足交换律。

证明：

设 $\sigma = (a_1\, a_2 \ldots a_k)$ 和 $\tau = (b_1\, b_2 \ldots b_m)$ 是两个不相交的轮换。我们需要证明 $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$。从以下三个方面考虑任意元素 $x \in A$：

(1) $x \notin \{a_1\, a_2 \ldots a_k\}$ 且 $x \notin \{b_1\, b_2 \ldots b_m\}$，则 $\sigma(x) = x$ 且 $\tau(x) = x$。因此：

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma(x) = x$$

$$(\tau \circ \sigma)(x) = \tau(\sigma(x)) = \tau(x) = x$$

所以 $(\sigma \circ \tau)(x) = (\tau \circ \sigma)(x)$。

(2) $x \in \{a_1\, a_2 \ldots a_k\}$ 且 $x \notin \{b_1\, b_2 \ldots b_m\}$，那么 $\tau(x) = x$，因此：

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \sigma(x)$$

$$(\tau \circ \sigma)(x) = \tau(\sigma(x)) = \sigma(x)$$

所以 $(\sigma \circ \tau)(x) = (\tau \circ \sigma)(x)$。

(3) $x \notin \{a_1\, a_2 \ldots a_k\}$ 且 $x \in \{b_1\, b_2 \ldots b_m\}$，那么 $\sigma(x) = x$，因此：

$$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x)) = \tau(x)$$

$$(\tau \circ \sigma)(x) = \tau(\sigma(x)) = \tau(x)$$

所以 $(\sigma \circ \tau)(x) = (\tau \circ \sigma)(x)$。

4. 证明：有限集 A 的任一置换可唯一表示为 A 的一组不相交的轮换的复合。

证明：

设 σ 为 $A=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的置换，任取 $a\in A$，构造序列

$$\langle\sigma^0(a),\sigma^1(a),\sigma^2(a),\cdots,\rangle$$

其中：$\sigma^0(a)=a$，$\sigma^1(a)=\sigma(a)$、$\sigma^2(a)=\sigma(\sigma(a))$，$\cdots$。在这个构造的序列中必存在一个 $0<k\leqslant n$ 满足 $\sigma^k(a)=a$，这是因为 σ 是 A 上的映射，且 A 中元素个数有限，此时 $(\sigma^0(a),\sigma^1(a),\sigma^2(a),\cdots,\sigma^{k-1}(a))$ 就是一个轮换。若 $A-\{a,\sigma^1(a),\cdots,\sigma^{k-1}(a)\}=\emptyset$，则定理得证；若 $A-\{a,\sigma^1(a),\cdots,\sigma^{k-1}(a)\}\neq\emptyset$，则从其中人选一个元素，按上述方法可继续构造一个轮换，如此下去直至每个元素都在一个轮换中。所以，可将 σ 分解为一些不相交的轮换的复合。

5. 填下表，展示例 8.1 中的 8 个置换构成一个置换群。

解：

复合 \ 置换 / 置换	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_0	σ_7	σ_6	σ_4	σ_5
σ_2	σ_2	σ_3	σ_0	σ_1	σ_5	σ_4	σ_7	σ_6
σ_3	σ_3	σ_0	σ_1	σ_2	σ_6	σ_7	σ_5	σ_4
σ_4	σ_4	σ_6	σ_5	σ_7	σ_0	σ_2	σ_1	σ_3
σ_5	σ_5	σ_7	σ_6	σ_4	σ_2	σ_0	σ_3	σ_1
σ_6	σ_6	σ_5	σ_7	σ_4	σ_3	σ_1	σ_0	σ_2
σ_7	σ_7	σ_4	σ_6	σ_5	σ_1	σ_3	σ_2	σ_0

6. 验证正方形顶点着色例子中构造的两个置换群 $(\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6,\sigma_7\},\bullet)$ 和 $(\{\sigma'_0,\sigma'_1,\sigma'_2,\sigma'_3,\sigma'_4,\sigma'_5,\sigma'_6,\sigma'_7\},\bullet)$ 同构。

证明：

令

$$G_1=(\{\sigma_0,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5,\sigma_6,\sigma_7\},\bullet)$$
$$G_2=(\{\sigma'_0,\sigma'_1,\sigma'_2,\sigma'_3,\sigma'_4,\sigma'_5,\sigma'_6,\sigma'_7\},\bullet)$$

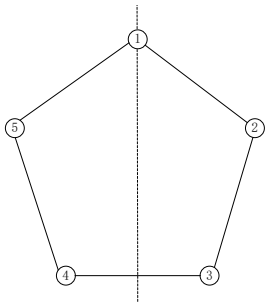
定义一个映射 $\phi:G_1\to G_2$ 满足：$\forall k\in\{0,1,\cdots,7\}:\phi(\sigma_i)=\sigma'_i$。容易验证该映射满足同构的定义。

另一直观的验证方案：针对群 G_2 构造一个如第 5 题中的表，通过这两个表可以很容易看到他们同构。

7. 分别利用伯恩赛德计数定理与波利亚计数定理求解 5 颗珠子 3 种颜色的项链计数问题，这里不仅考虑平面上的旋转等价，还要考虑空间中的翻转等价。注：5 个珠子的项链可以看作正五边形的 5 个顶点，空间中的一个翻转是以正五边形的一个顶点到对边的中垂线为轴翻转 180°。通过该习题观察哪个定理使用起来更简单？

解：

(1) 伯恩赛德计数原理:



如上图所示，先给 5 颗珠子编号，用三种颜色进行着色可以着出 $3^5 = 243$ 种。共形成以下置换：

不操作，置换记为 σ_0，此时的不变元的个数为：$\#(\sigma_0) = 243$；

顺时针旋转 1 颗珠子，置换记为 σ_1，可以想象，在 243 种着色方案中，只有 5 颗珠子着同种颜色的那些方案在这个置换中是不变元，因此 $\#(\sigma_1) = 3$；同理，对顺时针旋转 2 颗珠子、3 颗珠子、4 颗珠子所对应的置换 σ_2、σ_3、σ_4 来说，其中的不变元均为 3，即 $\#(\sigma_2) = \#(\sigma_3) = \#(\sigma_4) = 3$。

以编号为 1 的珠子到其对边的中垂线为轴翻转 180°，对应的置换记为 σ_5，只有编号为 2 和 5 的珠子着同种颜色、编号为 3 和 4 的珠子着同种颜色的方案才是这个置换中的一个不变元，这样的着色方案共有 $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ 种。同理，以编号为 2 的珠子到其对边的中垂线为轴翻转 180°，以编号为 3 的珠子到其对边的中垂线为轴翻转 180°，以编号为 4 的珠子到其对边的中垂线为轴翻转 180°，以编号为 5 的珠子到其对边的中垂线为轴翻转 180°，它们所对应的置换 σ_6、σ_7、σ_8 σ_9 中的不变元均为 27，即 $\#(\sigma_6) = \#(\sigma_7) = \#(\sigma_8) = \#(\sigma_9) = 27$。

因此，由伯恩赛德计数定理知，考虑这些等价时实际的不同的着色方案数为：$\frac{1}{10}(243 + 3 \times 4 + 27 \times 5) = 39$。

(2) 波利亚计数原理:

在不为珠子着色的情况下，考虑旋转与翻转共形成如下置换：

不操作：(1)(2)(3)(4)(5)；

顺时针旋转 1 颗珠子：(1 2 3 4 5)；

顺时针旋转 2 颗珠子：(1 3 5 2 4)；

顺时针旋转 3 颗珠子：(1 4 2 5 3)；

顺时针旋转 4 颗珠子：(1 5 4 3 2)；

以编号为 1 的珠子到其对边的中垂线为轴翻转 180°：(1)(2 5)(3 4)；

以编号为 2 的珠子到其对边的中垂线为轴翻转 180°：(2)(1 3)(4 5)；

以编号为 3 的珠子到其对边的中垂线为轴翻转 180°：(3)(1 5)(2 4)；

以编号为 4 的珠子到其对边的中垂线为轴翻转 180°：(4)(1 2)(3 5)；

以编号为 5 的珠子到其对边的中垂线为轴翻转 180°：(5)(1 4)(2 3)。

针对以上每个置换，每个轮换因子都有 3 中着色方案，因此，由波利亚计数定理知，共形成不同的着色方案数为：$\frac{1}{10}\left(3^5+3^1\cdot 4+3^3\cdot 5\right)=39$。

8. 考虑有 4 个变量的布尔函数的等价类计数问题。

解： 设 $(0,0,0,0)$ 记作 0，$(0,0,0,1)$ 记作 1，$\cdots$，$(1,1,1,1)$ 记作 15。考虑 4 个输入变量 x_1,x_2,x_3,x_4 的交换情况：

(1) 针对 $(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)$，产生恒等置换

$$\sigma_0=(0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)$$

轮换因子的个数为 $\&(\sigma_0)=16$。

(2) 针对 $(x_1x_2)(x_3x_4)$，产生置换

$$\sigma_1=(0)(1\ 2)(3)(4\ 8)(5\ 10)(6\ 9)(7\ 11)(12)(13\ 14)(15)$$

轮换因子的个数为 $\&(\sigma_1)=10$；同理，针对 $(x_1x_3)(x_2x_4)$、$(x_1x_4)(x_2x_3)$ 的情况，产生的置换 σ_2 与 σ_3 的轮换因子的个数也为 10，即 $\&(\sigma_2)=\&(\sigma_3)=10$。

(3) 针对 $(x_1)(x_2)(x_3x_4)$，产生置换：

$$\sigma_4=(0)(1\ 2)(3)(4)(5\ 6)(7)(8)(9\ 10)(11)(12)(13\ 14)(15)$$

轮换因子的个数为 $\&(\sigma_4)=12$；同理，针对 $(x_1)(x_3)(x_2x_4)$、$(x_1)(x_4)(x_2x_3)$、$(x_2)(x_3)(x_1x_4)$、$(x_2)(x_4)(x_1x_3)$、$(x_3)(x_4)(x_1x_2)$ 的情况，产生的置换 σ_5、σ_6、σ_7、σ_8、σ_9 的轮换因子的个数也为 12，即 $\&(\sigma_5)=\&(\sigma_6)=\&(\sigma_7)=\&(\sigma_8)=\&(\sigma_9)=12$。

(4) 针对 $(x_1)(x_2x_3x_4)$，产生置换：

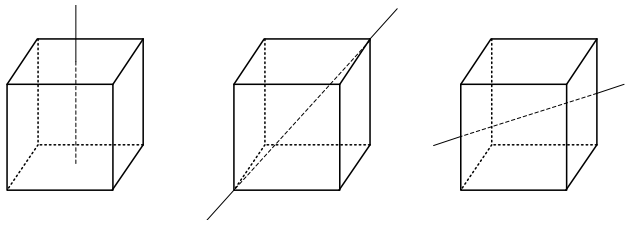
$$\sigma_{10}=(0)(1\ 4\ 2)(3\ 5\ 6)(7)(8)(9\ 12\ 10)(11\ 13\ 14)(15)$$

轮换因子的个数为 $\&(\sigma_{10})=8$；同理，针对 $(x_1)(x_2x_4x_3)$、$(x_2)(x_1x_2x_3)$、$(x_2)(x_1x_4x_3)$、$(x_3)(x_1x_2x_4)$、$(x_3)(x_1x_4x_2)$、$(x_4)(x_1x_2x_3)$、$(x_4)(x_1x_3x_2)$ 所产生的置换的轮换因子均为 8。

(5) 同理可求针对 $(x_1x_2x_3x_4)$、$(x_1x_2x_4x_3)$、$(x_1x_3x_2x_4)$、$(x_1x_3x_4x_2)$、$(x_1x_4x_2x_3)$、$(x_1x_4x_3x_2)$，所产生的置换的轮换因子均为 6。

由波利亚计数定理知，总数为:

$$\frac{1}{24}\left(2^{16}+3\cdot 2^{10}+6\cdot 2^{12}+8\cdot 2^{8}+6\cdot 2^{6}\right)=3984$$



9. 用 3 种颜色对正六面体的 6 个面着色，考虑空间中的旋转等价，则有多少种不同的着色方案？

解：

将正六面体的 6 个面标记为：上、下、左、右、前、后。构造正六面体空间旋转的置换群。

(1) 不旋转：产生恒等置换 (上)(下)(左)(右)(前)(后)，轮换因子为 6。

(2) 绕上下面中心连线顺时针旋转 90°：产生置换 (上)(下)(左后右前)，轮换因子为 3；同理，绕左右面中心连线顺时针旋转 90°、绕前后面中心连线顺时针旋转 90° 产生的置换的轮换因子也都为 3。

(3) 绕上下面中心连线顺时针旋转 180°：产生置换 (上)(下)(左右)(前后)，轮换因子为 4；同理，绕左右面中心连线顺时针旋转 180°、绕前后面中心连线顺时针旋转 180° 产生的置换的轮换因子也都为 4。

(4) 绕上下面中心连线顺时针旋转 270°：产生置换 (上)(下)(左前右后)，轮换因子为 3；同理，绕左右面中心连线顺时针旋转 270°、绕前后面中心连线顺时针旋转 270° 产生的置换的轮换因子也都为 3。

(5) 绕前面的左下顶点与后面的右上顶点所形成的体对角线顺时针旋转 120°：产生置换 (上右后)(下左前)，轮换因子为 2；同理，绕其他 3 条体对角线顺时针旋转 120° 形成的置换的轮换因子也为 2。

(6) 绕前面的左下顶点与后面的右上顶点所形成的体对角线顺时针旋转 240°，产生置换 (后右上)(前左下)，轮换因子为 2；同理，绕其他 3 条体对角线顺时针旋转 240° 形成的置换的轮换因子也为 2。

(7) 绕前面的左边与后面的右边的中心连线旋转 180°：产生置换 (上下)(前左)(后右)，轮换因子为 3；同理，绕其他 5 对边的中心连线旋转 180° 形成的置换的轮换因子也均为 3。

由波利亚计数定理知，不同的着色方案数为：

$$\frac{1}{24}\left(3^6+3\times3^3+3\times3^4+3\times3^3+4\times3^2+4\times3^2+6\times3^3\right)=57$$